

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟ 2^ο ΚΕΦ. ΜΑΘ/ΚΩΝ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΓΟΠ 2)

Θέμα 1^ο : α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . (Μον. 10)

β) Να επιλέξετε το σωστό ή το λάθος για τους ισχυρισμούς που ακολουθούν :

i) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x}$ παριστάνει την κλίση της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu x$ στο $x_0 = 0$. Σ Λ

ii) Ισχύει $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$, με $x \in R$, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Σ Λ

iii) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και κυρτή σε αυτό , τότε ισχύει ότι $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta$. Σ Λ

(Μον. 3 · 5 = 15)

Θέμα 2^ο : Έστω η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = x \cdot e^x$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα (αν υπάρχουν) της f . (Μον. 6)

β) Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) της f . (Μον.6)

γ) Να ελέγξετε αν η f έχει ασύμπτωτες . (Μον. 6)

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f . (Μον.7)

Θέμα 3^ο : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \alpha x + \alpha$, με $x > 0$, $\alpha > 0$.

A) Αν ισχύει ότι $f(x) \leq 0 \quad \forall x > 0$, να βρεθεί η τιμή του α . (Μον. 8)

B) Για $\alpha = 1$: i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία και ακρότατα (Μον. 7) και

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\frac{\lambda^2+2}{2\lambda^2+1}\right) < 1 - \lambda^2$ με $\lambda \in R$. (Μον. 10)

Θέμα 4^ο : Δίνεται η παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση f με $D_f = [0, +\infty)$,
για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f'(0) = 0$, με f' συνεχή στο $[0, +\infty)$,
καθώς και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$
τέτοιο ώστε $f(x) = x \cdot f'(\xi)$. (Μον. 8)

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
(Μον. 8)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$ και $f(D_f) = [0, +\infty)$, τότε να δείξετε ότι το
σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $(0, 2)$. (Μον. 9)

Καλή επιτυχία !