

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ – DE L'HOSPITAL

+ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

1) Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων :

$$f(x) = x^6 - 10x^4 + 3, \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ -x^3 - x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$$

2) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμπής της οικογένειας συναρτήσεων $f(x) = 2\lambda e^x - x^2$, $\lambda > 0$.

3) Να βρεθούν οι τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = x^4 + \beta x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρουσιάζει τότε η f σημείο καμπής;

4) Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha^2 x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2} - 3x + 1$ να έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = e$.

iii) Να δείξετε ότι $\ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$, $\forall x > 1$.

7) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 3]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ και ισχύει $f^2(x) + 2f(x) + x^2 - 3x + 1 = 0$, $\forall x \in [0, 3]$.

i) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f και τα ακρότατά της.

- 8) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν: $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$ και $f''(x) > 0$ στο $[0, +\infty)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα ακριβώς $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
- 9) Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι:
 - η f είναι γνησίως αύξουσα
 - η εξίσωση $x + e^x = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0.
 - η f έχει μοναδική ρίζα το 0
 - η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.
 - Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο της $(0, f(0))$ και έπειτα να αποδείξετε ότι $f(x) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
- 10) Αν για τη συνάρτηση f υπάρχει η f'' $\forall x \in (-2, 2)$ και ισχύει η σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, $\forall x \in (-2, 2)$, τότε δεν υπάρχει σημείο καμπής για την f .
- 11) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = 4x^3 - 12\alpha x^2 + 12x - 2$.
Για ποιες τιμές του α στρέφει η f τα κοίλα πάνω;
- 12) Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda^2 x^3}{3} - \frac{\lambda x^2}{2} - 3x + 1$ να έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.
- 13) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = x^2 + \eta\mu x$ με $A_f = \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη σε οποιοδήποτε σημείο $(x_0, f(x_0))$ της C_f , δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την C_f .

14) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = (x + 1) \ln x$.

α) Να μελετηθεί ως προς κυρτότητα και σ.κ. .

β) Να βρεθεί η εφαπτόμενη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{2} \ln x < \frac{x-1}{x+1} \quad \forall x \in (0, 1)$.

15) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f στο 0 .

γ) Να δείξετε ότι $e^x \geq -\frac{x^2}{2} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

16) Να αποδείξετε τις επόμενες προτάσεις :

α) Αν μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0 , τότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 .

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το $f(x_0)$ είναι τ.α. , τότε το x_0 δεν είναι σ.κ. .

γ) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή και έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να δείξετε ότι $f(x) < 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$.

Επίσης , να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες .

17) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 1$.

β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι κοίλη .

18) (Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων 1997) :

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ και $f''(x) \cdot f(x) > [f'(x)]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως μονότονη .

β) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$.

19) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 3$, με f'' συνεχή στο 0. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{x \eta \mu x + \sigma \nu \nu x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f(x) + x^2]}{x - \eta \mu x}$$

20) Να βρείτε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2 \ln x}{x + \ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{x^2 - x + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\sigma \varphi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta \mu x)^{\varepsilon \varphi x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

21) Να μελετήσετε και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x - 2}, \quad f(x) = \frac{1 + \sigma \nu \nu x}{\eta \mu x} \quad \text{με } x \in (0, \pi),$$

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} & , x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \ln x^2 & , x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \end{cases}$$