

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ x_0

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά όχι παραγωγίσιμη σε αυτό.

2) Να ελέγξετε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 2$, για την

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 3x - 2, & x > 2 \end{cases}.$$

3) Ομοίως για την $f(x) = x|x - 3|$, στα σημεία $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

4) Για τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ ισχύει ότι $f(1 + x) = x^2 + 3x + \eta\mu^2 x$.

Να βρεθούν το $f(1)$ και το $f'(1)$.

5) Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x, & x \leq 1 \\ (a^2 + 2)x - 1, & x > 1 \end{cases},$

να βρείτε το $a \in R$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6) Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases},$

να βρείτε τα $a, \beta \in R$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

7) Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε η $f(x) = \begin{cases} \frac{-ax^2 + \beta x - \gamma}{x+1}, & \alpha\nu \ x < -1 \\ x^2 - 2ax - a, & \alpha\nu \ x \geq -1 \end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$. Να βρείτε το $f'(-1)$.

8) Για τη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$
 $\forall x, y \in R$ και υπάρχει η $f'(0)$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in R$.

9) Για την $f: R \rightarrow R$ ισχύει ότι $2x\eta\mu x \leq xf(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x \quad \forall x \in R$ και
η f είναι συνεχής στο 0 . Να βρεθούν τα $f(0)$ και $f'(0)$.

10) Αν η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει
 $f(1) = f'(1) = 1$. Να δείξετε ότι η $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + 1$
είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να βρεθεί το $g'(1)$.

11) Συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ είναι παραγωγίσιμη στο 1, με $f(1) = f'(1) = 1$
και $h(x) = \frac{2f(x)+1}{f(x)+3}$. Να δείξετε πως η h είναι παραγωγίσιμη στο 1
και να βρείτε το $h'(1)$.

12) Η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f(0) \leq 0$ και
 $f(x) + f(2x) + f(3x) \geq 6x \quad \forall x \in R$.
Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

13) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η

$$g(x) = \begin{cases} f(x^2) , & x \leq 1 \\ f(2x-1) , & x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 1 \text{ και} \\ \text{ισχύει } g'(1) = 2f'(1) . \end{array}$$

14) Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 3$. Αν για κάθε
 $x \in R$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = (x^2 - 9)^2$, να δείξετε ότι
 $[f'(3)]^2 + [g'(3)]^2 = 36$.

15) Έστω μία συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και
 $\forall x \in R$ ισχύει : $|xf(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4$. Να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.

16) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A_f$, να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} \quad , \quad \beta) A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h^2)}{h-\eta\mu 2h}$$

17) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in R_*$ ισχύει

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ . Να αποδείξετε ότι η } f \text{ παραγωγίζεται } \forall x_0 \in R_* \text{ .}$$

18) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in R_*$, να

αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0^2 f(x) - x^2 f(x_0)}{x-x_0} = x_0^2 \cdot f'(x_0) - 2x_0 \cdot f(x_0)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} = g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \text{ .}$$

19) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του R , $f(0) = 0$

και ισχύει $f(x+y) \leq f(x) + f(y) + xy \quad \forall x, y \in R$, να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = x + f'(0) \text{ .}$$

20) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο

$$M(x_0, f(x_0)) \text{ , με } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6 & , \text{ αν } x < 1 \\ -\frac{4}{x} & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 1 \text{ .}$$

21) Βρείτε την εφαπτομένη για την C_f στο σημείο $M(2, f(2))$, όταν

$$2x^2 - x + 2 \leq f(x) \leq 3x^2 - 5x + 6 \quad \forall x \in R \text{ .}$$

22) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f με $f(x) = x^3 - x$,

που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 2)$.

- 23) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι εφαπτόμενες των γραφ. παραστάσεων των $f(x) = \alpha x^2 + x + \beta$ και $g(x) = \frac{2}{x}$ στο κοινό τους σημείο $M(-1, -2)$ να είναι κάθετες .
- 24) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτόμενης των γραφ. παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$.
- 25) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) = 2f(3x - 4) - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της $g(x) = e^{2-x} \cdot f(x)$ στο $x_0 = 2$.