

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΣΤΟ 3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

15092

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας

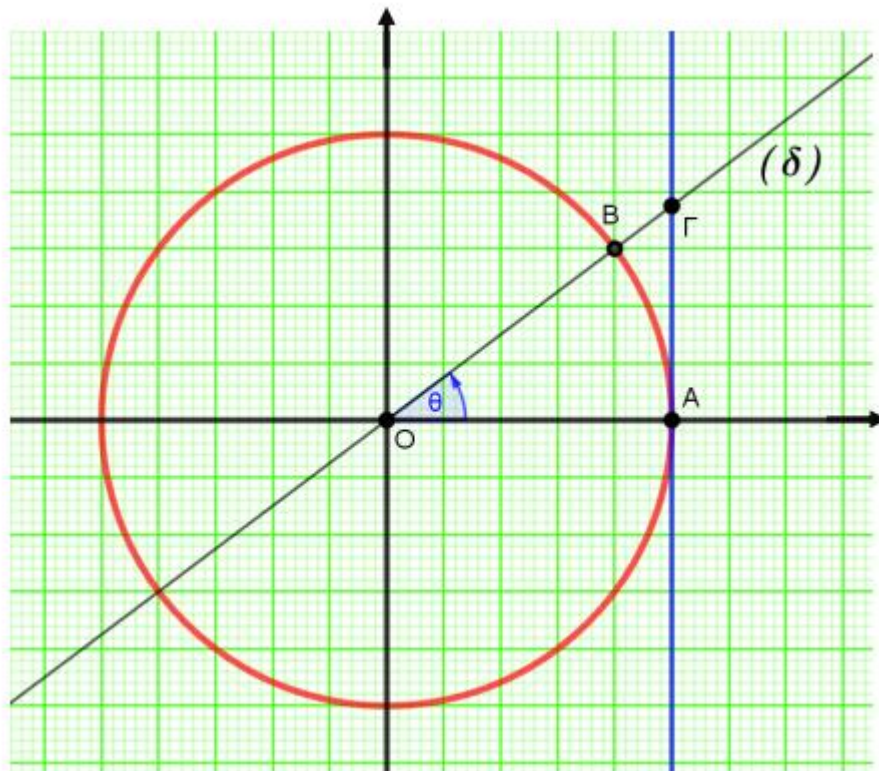
$\widehat{AOB} = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό $\sigma\upsilon\nu\theta$ και στη συνέχεια τον αριθμό $\varepsilon\varphi\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)



15999

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

21237

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

(Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 13)

15969

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

(Μονάδες 4)

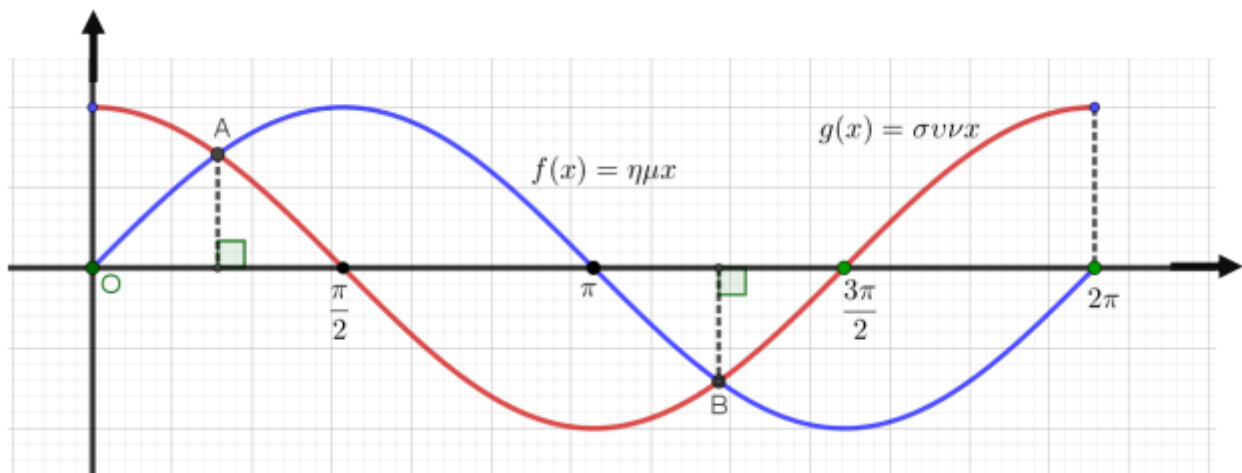
γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

(Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

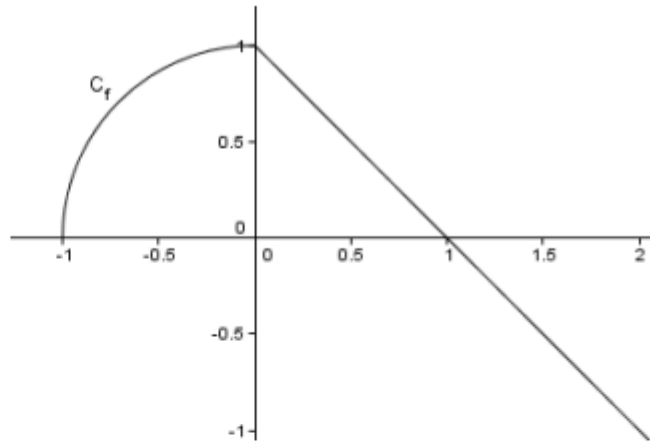
(Μονάδες 6)



18231

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sin 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

18234

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 4.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' .

(Μονάδες 7)

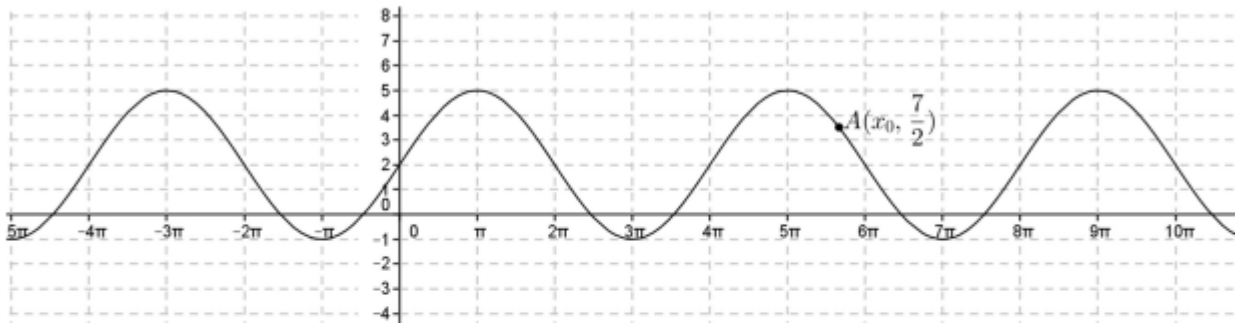
δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

33333

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, k και ω . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

21244

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sin(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

20712

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

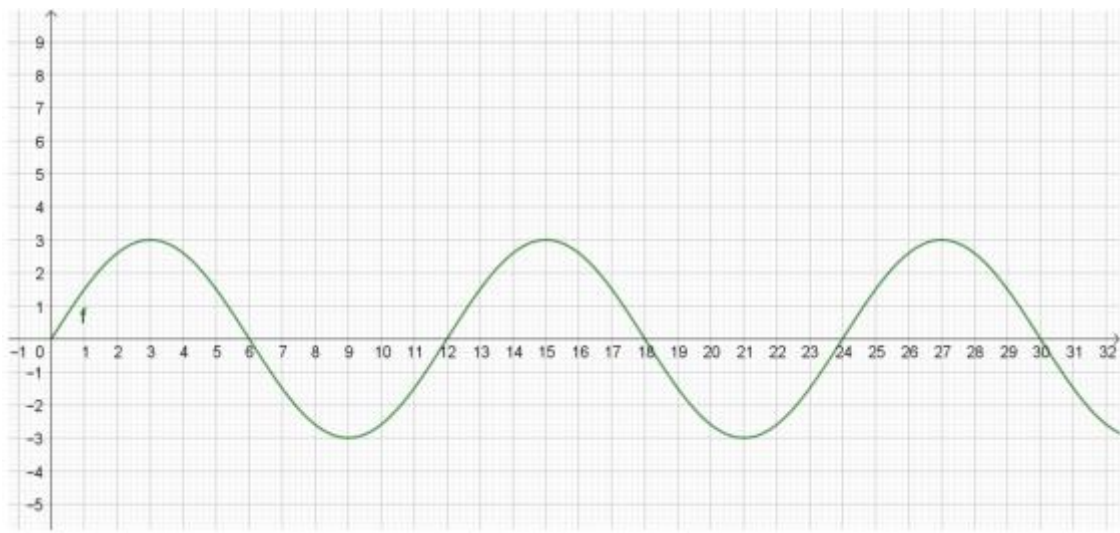
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



15821

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

15049

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

15347

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)