

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

20938. Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{a}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{a} = (|\vec{a}| - 4, |\vec{a}| - 2)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$.

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$.

2

15320. Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο.

3

22063.α) Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ii) $|\vec{a} + \vec{\beta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$.

ii) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

iii) $\vec{a} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{a}$.

4

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$.

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$.

5

20732. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{b} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{b}| = 4|\vec{a}|$.

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \vec{a} - \vec{b}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{b} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{a} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{b} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

7

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(a, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (a - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4a + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 10)

8

Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9, 2|\vec{a}| - |\vec{b}| = 1 \text{ και } (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$

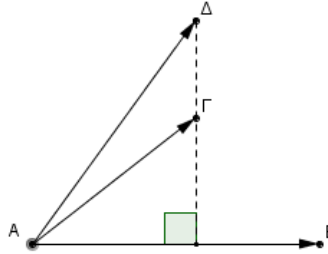
(Μονάδες 13)

9

α) Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$: i) είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii) μπορούν να συγκριθούν; (Μονάδες 5)

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

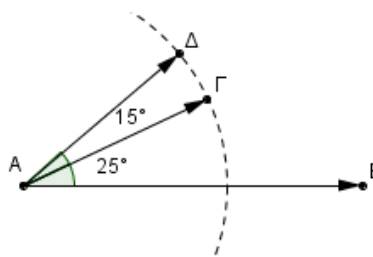
i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



(Μονάδες 10)

γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο A) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

10

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο OAGB με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$.

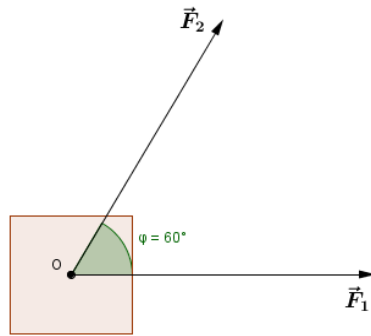
(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα

10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

11

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$ (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

12

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1), B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)