ΘΕΜΑ 1

α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

(Μονάδες 5)

γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε
πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

iii. Τα σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία μια συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

iv. Αν $0<\alpha<1$ τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

v. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε η παράγωγός της είναι θετική στο εσωτερικό του Δ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $x<0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **(Μονάδες 8)**

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 – 1". **(Μονάδες 5)**

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0,1)$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x)-e^{2x}=2xf(x)-x^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f'(\xi) - 1 = e^3 - e^2$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να χαράξετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f, αφού πρώτα βρείτε το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$. **(Μονάδες 6)**

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o = 1$. **(Μονάδες 6)**

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\dfrac{2F(x) - 1}{x} \geq \ln 4 - 1$. **(Μονάδες 5)**

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

α) Απόδειξη σελ. 133

β) Σελ. 128

γ) Λ – Σ – Λ – Σ – Λ

ΘΕΜΑ 2

Τράπεζα 29211

ΘΕΜΑ 3

$f^2(x) - e^{2x} = 2xf(x) - x^2$

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = e^{2x}$

$(f(x) - x)^2 = e^{2x}$

$|f(x) - x| = e^x$ (1)

Θέτω $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

• $g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ αδύνατη. Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο.

Όμως $g(0) = f(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$, συνεπώς $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $|f(x) - x| = |g(x)| = g(x) = f(x) - x$.

Συνεπώς από τη σχέση (1) $f(x) - x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x + x$

β) f παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

f' παραγ/μη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = e^x > 0$ άρα f κυρτή.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτ. στο $-\infty$ την $y = x$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{1} = +\infty \notin \mathbb{R}$

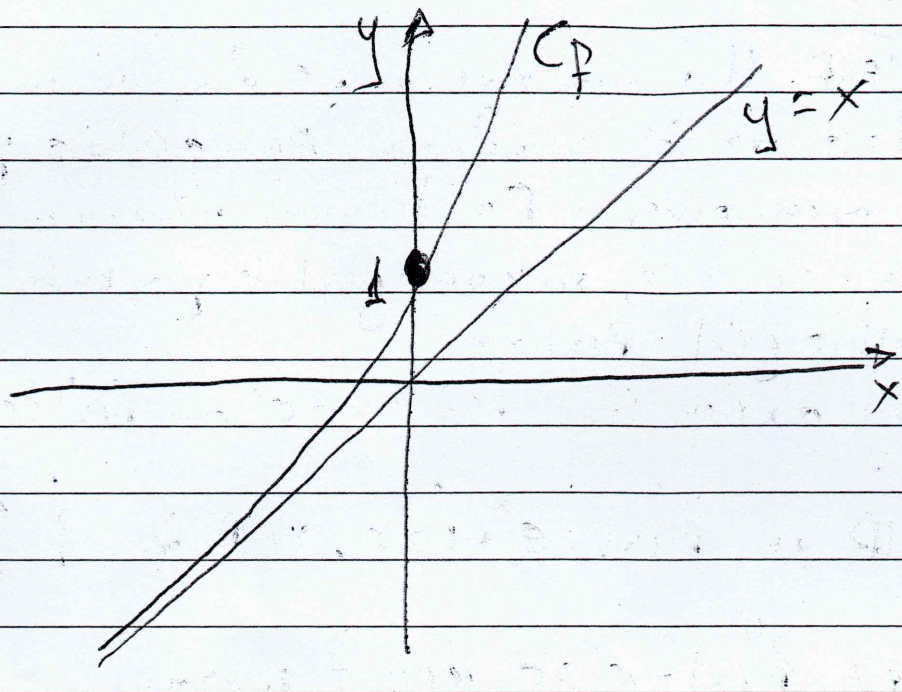
άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

γ) $f'(\xi) - 1 = e^3 - e^2 \Leftrightarrow f'(\xi) = e^3 - e^2 + 1$.

Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ κ' παραγ. στο $(2,3)$ άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (2,3)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{e^3 + 3 - (e^2 + 2)}{3 - 2} = e^3 - e^2 + 1.$$

δ) $f(0) = e^0 + 0 = 1$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,1)$



ΘΕΜΑ 4

Τράπεζα 24769