12685. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=2$ **β)** $\alpha=\beta$

13088. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί.
Ορίζουμε $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$.

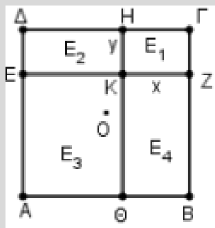
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

14458. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x+4y)(x+y)=9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $(2y-x)^2=0$ **ii)** $y=\dfrac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\dfrac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

15052. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ=x$ και $KH=y$, $x,\ y\in(0,\ 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ με τη βοήθεια των $x,\ y$.

β) Να βρείτε τα εμβαδά $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1+E_3=E_2+E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy+9=3(x+y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A=\alpha^2+4\alpha+5$ και $B=(2\beta+1)^2-1$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $A=(\alpha+2)^2+1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

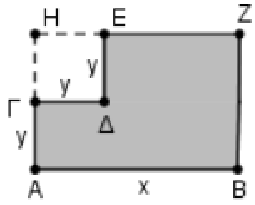
14410. Δίνονται οι παραστάσεις Α και Β με $A=\alpha^2+\alpha+\dfrac{1}{4}$ και $B=(\beta-3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $A+B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β έτσι, ώστε $A+B=0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε $A=-B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

35549. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ **β)** $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$

14820.α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \dfrac{3}{4}$ **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \dfrac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) > \dfrac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

ii. Με τη βοήθεια του β)ι με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\dfrac{9}{16}$.

13177.Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α β, για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

13179.Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \dfrac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.

14682.Δίνονται οι αριθμοί: $A = \left(\sqrt{3}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

34155. Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B .

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha=1+\sqrt{2}$ και $\beta=1-\sqrt{2}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-\beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A=4\sqrt{2}$ και $B=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}$.

34163. Δίνεται η εξίσωση $\lambda\cdot x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1),\ \lambda\in\mathbb{R} .$$

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

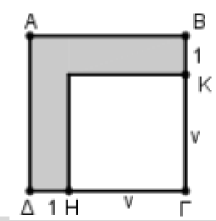
14543. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.



14406. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\dfrac{\alpha^{22}\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$.

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\dfrac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

34327.α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0$ (1) .

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

36661. Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right)\cdot x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-\left(\lambda+1\right)x+1=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

14578. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi=\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}$.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0$.

34154. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α,Β .

14759. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+6\alpha x+6\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha)+f(\beta)\geq\beta^2-36$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha)+f(\beta)=\beta^2-36$.

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=-6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=6x$.

ii. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}$.

34162.α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x-5|\leq 3$ (1).

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2-x-1\geq 0$ (2).

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

14615. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1<k<\rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$.

34145. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

12945. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha_3=8$, $\alpha_{11}=32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56 .

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=2$ και $\omega=3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) ε ίναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

13171. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=S_\nu=2\nu^2+3\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1}=2\nu^2-\nu-1$, $\nu\geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu=4\nu+1$, $\nu\geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

33581. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.

α) Να βρείτε τον $1^{ο}$ όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

Αν $\alpha_1=2$ και $\omega=3$,

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της προόδου.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)\ +\ ...+\ (\alpha_{31}+31)$

34156. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

12998. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν): $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}, \dfrac{81}{2}, \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$

β) Αν $\alpha_7=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$.

13026. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν x άρρητος} \\ 2x, & \text{αν x ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

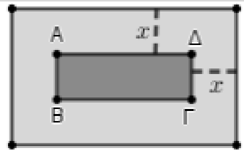
β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $\left[f(x)\right]^2=4x-1$.

37185. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

12911. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x$, $x>0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500$ m².

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m²; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33855.α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

12686. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

12788. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$.

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει f(α) = f(β) .
Να αποδείξετε ότι α + β = 2.

13030. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ και $g(x)=|x+3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .