

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 10.5

ΕΜΒΑΔΑ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

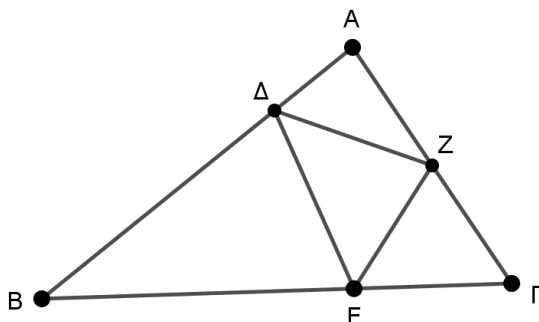
ΘΕΜΑ 15978 (2°)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, τα Δ , E , Z , είναι σημεία των πλευρών

AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε: $A\Delta = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{2}{3}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$, $(BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$, $(\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 15)

β) $(\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 16127 (2°)

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $AD = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ομόλογη πλευρά της $B\Gamma$ είναι η $B'\Gamma' = 6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, (Μονάδες 7)

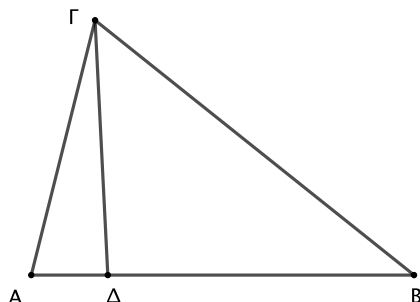
ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'\Gamma'$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16756 (2°)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$ (Μονάδες 15)

β) Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 16770 (2°)

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στην $O\delta$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $\widehat{OEB} = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $\widehat{ODA} = 70^\circ$.

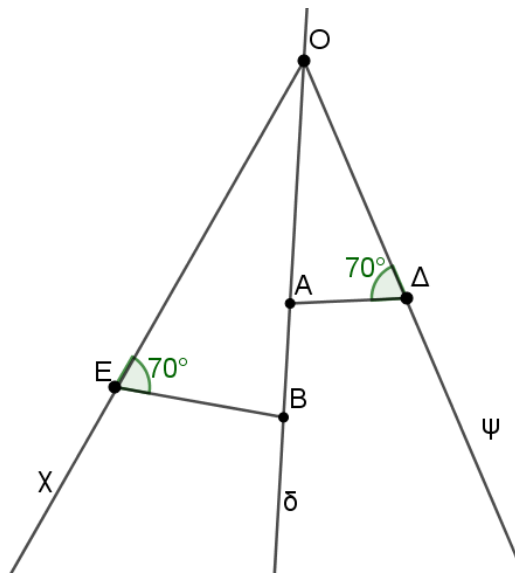
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και ODA είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου OAD είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .

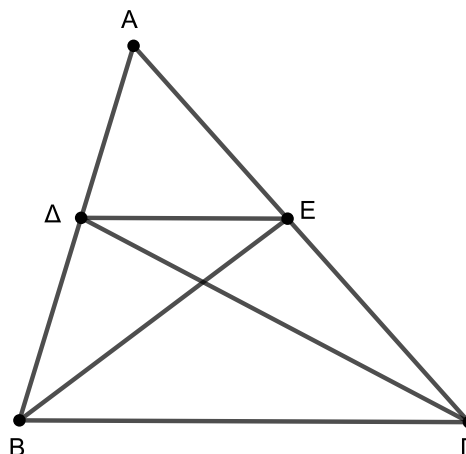
(Μονάδες 09)

**ΘΕΜΑ 16806 (2°)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB) = (\Delta E\Gamma)$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 20667 (2°)

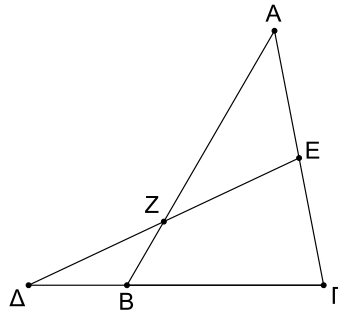
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της ΓB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 21120 (2°)**

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

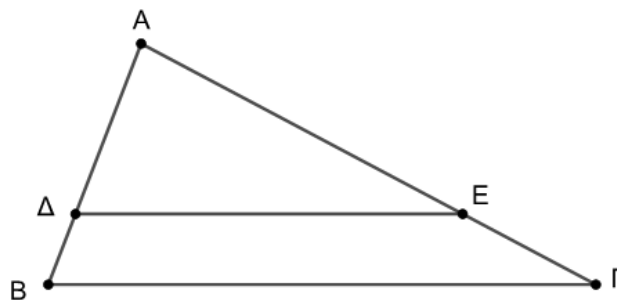
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $A\Delta E$ και του τραπεζίου $B\Gamma E\Delta$.

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 21189 (2°)**

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M , N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$ (Μονάδες 12)

γ) $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 21304 (2°)

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

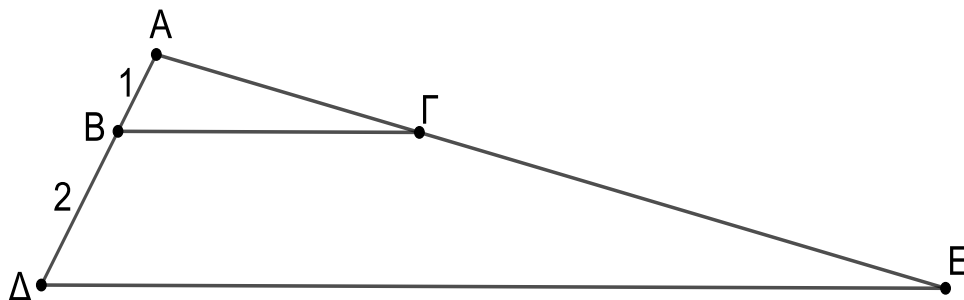
(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)

**ΘΕΜΑ 21636 (2°)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$, και $B\Gamma=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Αν AD είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{3}{4}.$$

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 22070 (2°)

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

(Μονάδες 12)

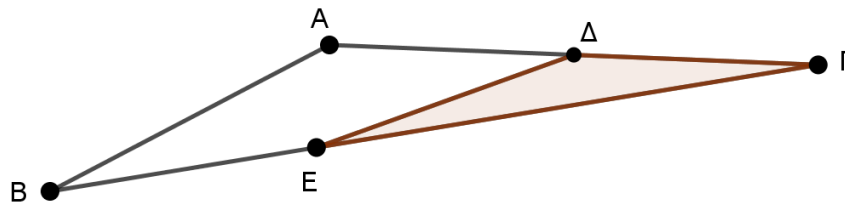
ΘΕΜΑ 22260 (2°)

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με $AB=4$, $AG=6$ και $\widehat{A} = 150^\circ$. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 16114 (4°)**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $GE = \frac{1}{4}GA$.

α) Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε $AD = \frac{1}{3}AB$:

i) Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ)$ (Μονάδες 10)

ii) Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΓΗ}$ (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(ΑΒΓ) = 2(ΑΔΕ)$ (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 16582 (4°)

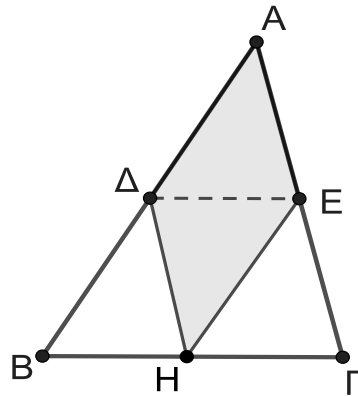
Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii) Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

- β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)

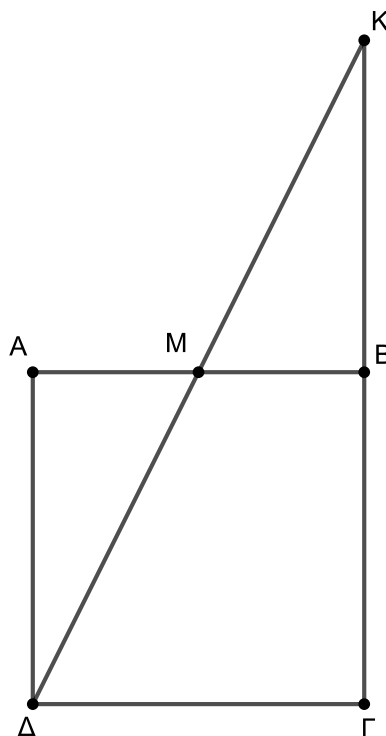


ΘΕΜΑ 16732 (4°)

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)
- β) $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$ (5 μονάδες)
- γ) $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4} (ΑΒΓΔ)$. (10 μονάδες)
- δ) Αν $(ΜΒΓΔ) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



ΘΕΜΑ 17907 (4°)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

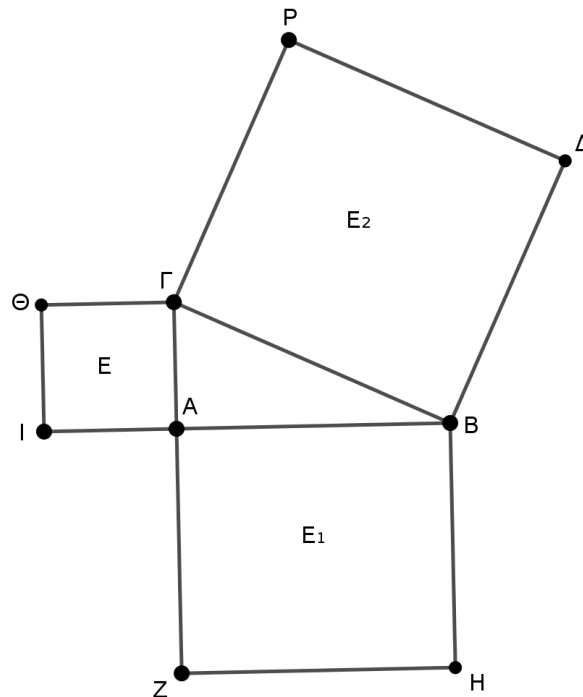
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η $A\Gamma=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 17956 (4°)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$

(Μονάδες 09)

β) $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$

(Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ . (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 18301 (4^ο)

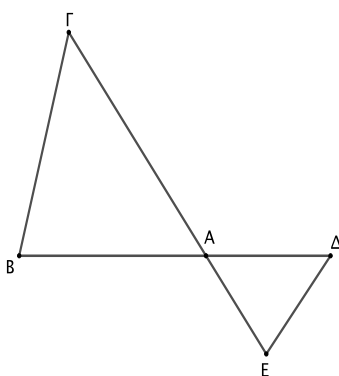
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2}AB$ και $A\epsilon = \frac{2}{5}A\Gamma$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda}AB$ και $A\epsilon = \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να

αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ . (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta\epsilon) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

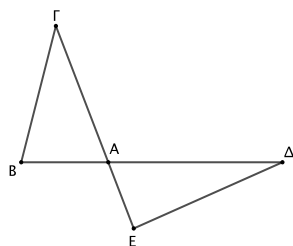
**ΘΕΜΑ 18302 (4^ο)**

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{2}A\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\epsilon$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $A\epsilon = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta\epsilon$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα; (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του ϵ ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ να είναι όμοια (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 18369 (4°)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\widehat{A} = 36^\circ$.

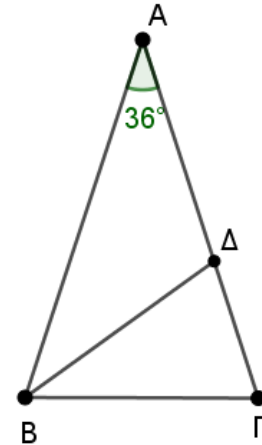
α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

- i) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)
- ii) Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = 3$.

(Μονάδες 09)

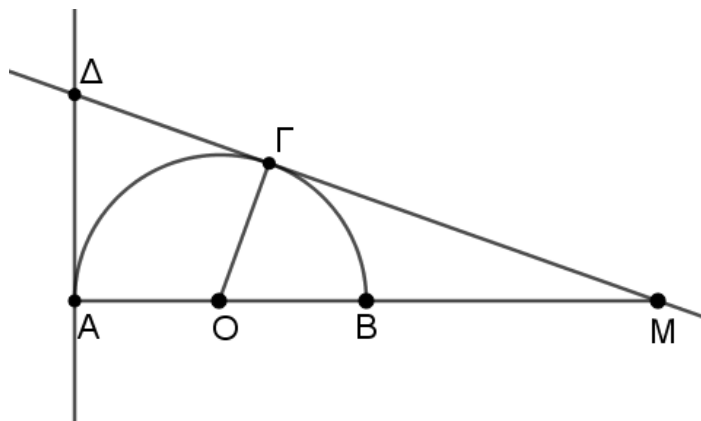
**ΘΕΜΑ 18369 (4°)**

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:

α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{MA}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$. (Μονάδες 07)

**ΘΕΜΑ 18371 (4ο)**

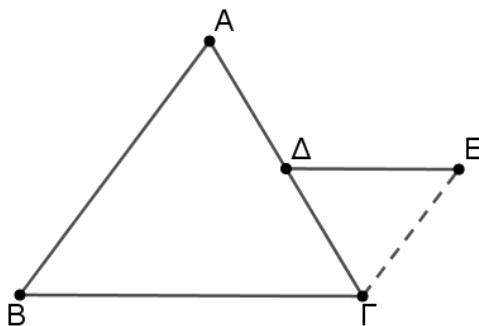
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α) i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.

(Μονάδες 10)

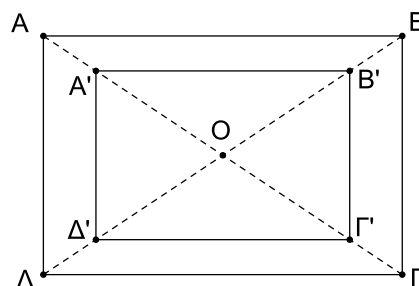
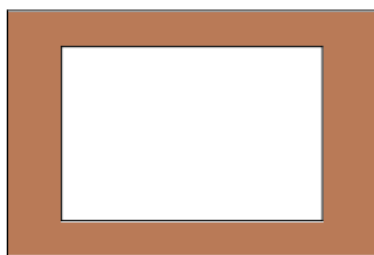
β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta ΕΓ)}{(\Delta ΒΓ)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\widehat{A} = \widehat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta Γ}{ΑΓ} = \frac{\Delta Ε}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\widehat{A}, \widehat{Γ}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta ΕΓ)}{(\Delta ΒΓ)} = \left(\frac{\Delta Ε}{ΑΒ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος; (Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 20678 (4ο)

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

- α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια. (Μονάδες 6)
- γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\widehat{ΑΟΒ} = 120^\circ$.
- Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)
 - Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας; (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 21194 (4ο)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η AM είναι διάμεσός του και το σημείο E είναι το μέσο της AM . Από το E φέρουμε παράλληλες στις AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν τη $B\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = (AM\Gamma)$ (Μονάδες 5)

β) $(ME\Delta) = \frac{1}{8} \cdot (AB\Gamma)$ (Μονάδες 12)

γ) $(AB\Delta E) = (A\Gamma ZE)$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 21839 (4°)

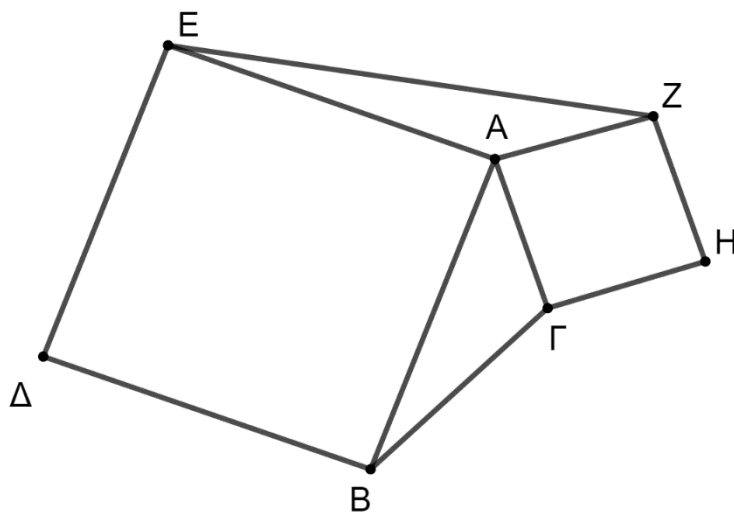
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = 3\text{ cm}$ και $\widehat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54\text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\widehat{A} = 30^\circ$. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 22023 (4^ο)

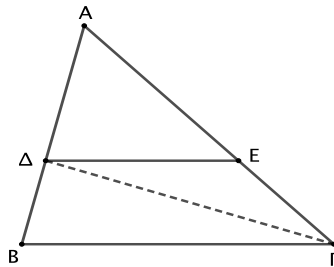
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$. (Μονάδες 05)

**ΘΕΜΑ 22141 (4^ο)**

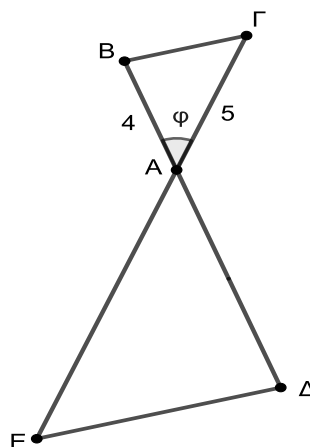
Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(A\Delta E)$ του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$. (Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $A\Delta$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 22148 (4°)

Έστω E σημείο στην πλευρά $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$ του $ΑΒΓ$ η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $Αχ$ της πλευράς $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $ΑΓ = 3ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 07)

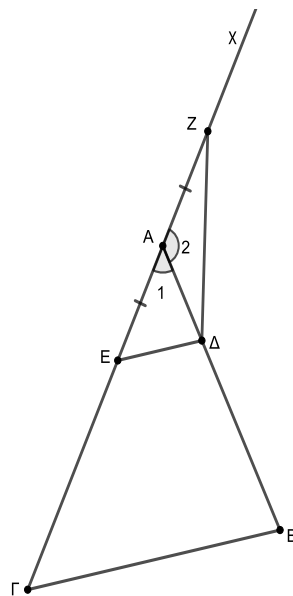
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΖ$ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του $ΔΕΖ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $ΑΒΓ$, να υπολογίσετε το

λόγο $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$.

(Μονάδες 08)

**ΘΕΜΑ 22150 (4°)**

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $ΑΓ$ και $ΑΒ$, αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΔ$ ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το μέσο $Δ$ της απέναντι πλευράς $ΒΓ$, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα $ΕΔΓ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

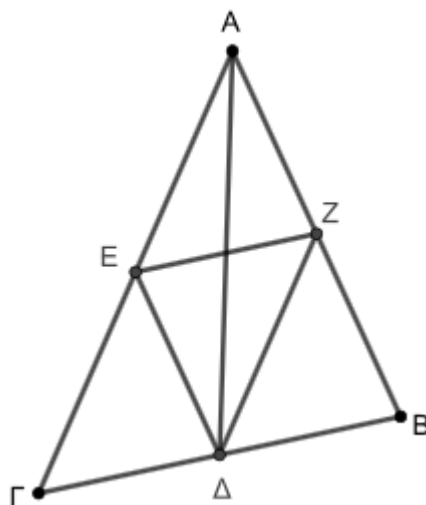
ii) Για το εμβαδόν $(ΑΕΔΖ)$ του τετραπλεύρου $ΑΕΔΖ$ ισχύει ότι

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii) Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΕΔΖ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 18)

- β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 22243 (4^ο)

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $AZ = \frac{3}{4}AB$.

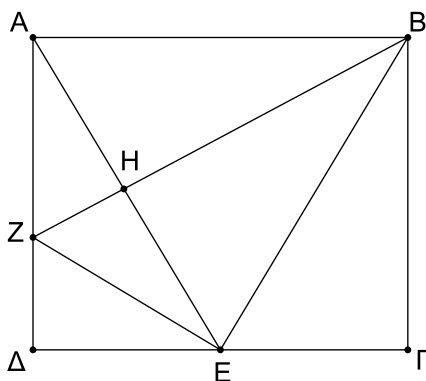
- α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$. (Μονάδες 6)

- β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$, (Μονάδες 6)

- ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

- γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 22340 (4°)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

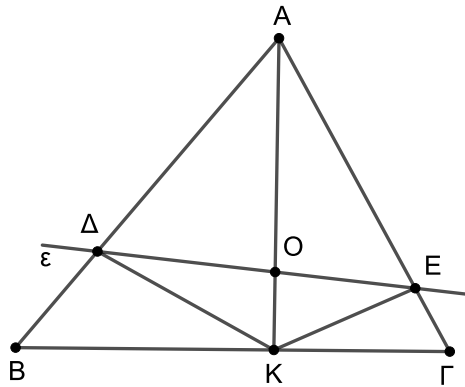
i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$, (Μονάδες 7)

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$, (Μονάδες 7)

iii. $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$. (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

**ΘΕΜΑ 22375 (4°)**

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2K\Gamma$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε $\Lambda A = 2\Lambda K$. Έστω E_1 , E_2 , E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $A\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Lambda K$, $B\Lambda K$ και $A\Lambda B$ αντίστοιχα.

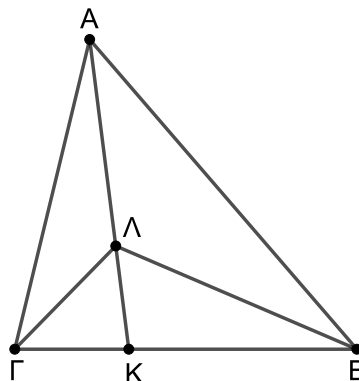
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$. (Μονάδες 10)

ii. $E_1 = E_3$. (Μονάδες 8)

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 22380 (4°)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στη ευθεία ΑΔ.

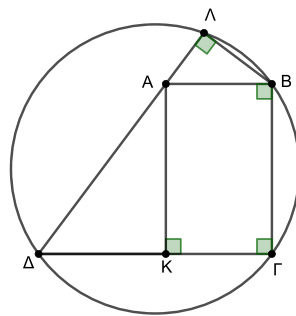
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ. (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 22404 (4°)**

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{MB}{MG}$ και

το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

α) Έστω $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

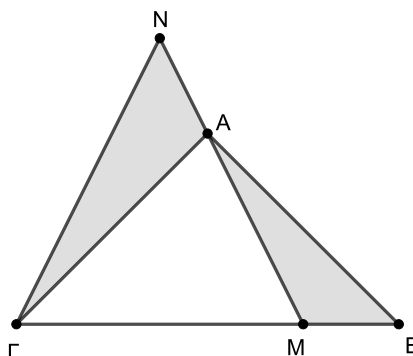
i. $\frac{(AMB)}{(AMG)} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(AMB) = (ANG)$. (Μονάδες 6)

β) Έστω $\frac{MB}{MG} = 1$ και $(AMB) = (ANG)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο

Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 22406 (4°)

Στο παρακάτω σχήμα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.

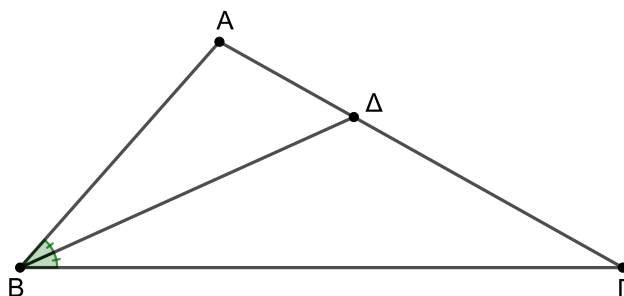
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$. (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 22407 (4°)**

Στο παρακάτω σχήμα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η AK είναι η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία AB . Δίνονται $AB = 10$, $A\Gamma = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma K = 12$ και $(AB\Gamma) = 60$. (Μονάδες 8)

ii. $(A\Delta B) = 24$ και $(A\Delta\Gamma) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB .

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα BK . (Μονάδες 4)

