

Επαναληπτικές Ασκήσεις Άλγεβρας

(1) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις :

(α) $\ln(3^x + 2) = 2x \ln 3$

(β) $\ln^2 x > \ln x$

(γ) $\ln^2 x - \ln \frac{1}{x} - 2 > 0$

(δ) $x^{\ln x} = x\sqrt{x}$

(ε) $\ln x < \frac{1}{x} - 1$

(στ) $\frac{1}{\ln(x-3)} < \frac{1}{\ln(5-x)}$

(ζ) $\eta\mu(\pi \ln x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ στο $(1, e\sqrt{e})$

(2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + \frac{1}{\ln x}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(β) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 6$.

(δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

(ε) Να βρείτε τα σημεία της C_f με τεταγμένη 3.

(3) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{6-x}{4+x}\right)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-2) + f(x) = 0$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{2}f(x) \geq \ln(3\sqrt{3}) - \ln 3$.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) < x$.

(4) Έστω $f(x) = \ln x$, $x > 0$.

(α) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt[3]{f(x)} + f(x) \leq 10$.

(β) Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι :

(i) $f(\eta\mu\theta) < 0$ (ii) $f\left(\frac{e}{\eta\mu\theta}\right) > \eta\mu\theta$

(5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln x^2$.

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

(β) Να λύσετε τις ανισώσεις : (i) $f(x) \geq 0$ (ii) $g(x) < 0$

(γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{1}{e}\right)$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e+1})$.

(6) Έστω $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x + 1)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 3$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

(δ) Αν $y \in \mathbb{R}$ και $f(x) = y$ να αποδείξετε ότι $x = \ln(e^y + 1)$.

(7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha+3}{3-\alpha}\right)^x$.

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(γ) Για $\alpha = 2$:

(i) να λύσετε την εξίσωση $f(x+1) = f(x) + 4$.

(ii) να λύσετε την ανίσωση $y^{2\log 5} + 5 > 6f(\log y)$.

(8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{36x^2 + 1} - 6x)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(1)$.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > x + \ln 4$.

(9) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1 + \ln(3e - 2x)}{\ln x}$ και $g(x) = \frac{2}{\ln x}$.

(α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

(β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g .

(γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 2$.

(δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η g βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(10) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x$.