

Μαθηματικά Κατεύθυνσης - Επαναληπτικές Ασκήσεις

- (1) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda + 5)x - (\lambda + 3)y - \lambda - 8 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει κύκλο.
- (β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την (1) για $\lambda = 3$. Να βρείτε :
- (i) τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ του C .
- (ii) την εξίσωση της παραβολής C_1 που έχει κορυφή το $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας των $x'x$ και διευθετούσα την ευθεία $x = x_0$, όπου x_0 η τετμημένη του κέντρου K του κύκλου C .
- (iii) την εξίσωση του κύκλου C_2 , που έχει κέντρο το σημείο $A(1,-4)$ και διέρχεται από την εστία E της παραβολής C_1 .
- (2) Δίνεται κύκλος C που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(4,1)$ και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $\zeta: x - 3y + 3 = 0$.
- (α) Να αποδείξετε ότι ο C έχει εξίσωση $C: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$.
- (β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από το σημείο $\Sigma(0,1)$.
- (γ) Έστω η παραμετρική εξίσωση $(x-y-1) + \lambda(-x-y+5) = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία (ε) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο Δ , το οποίο και να βρεθεί.
- (ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε) τέμνουν τον κύκλο C σε δύο σημεία $\Gamma(\alpha, \beta)$ και $\Delta(\gamma, \delta)$, τέτοια ώστε $(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 = 8$.
- (3) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + (\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y + \lambda^2 = 0$ (1)
- (α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι τα κέντρα K ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 2 = 0$.
- (β) Θεωρούμε την παραβολή $x^2 = 2py$, για την οποία γνωρίζουμε ότι εφάπτεται στην ευθεία (ε) . Να βρείτε :
- (i) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
- (ii) την εφαπτομένη της παραβολής που είναι κάθετη στην (ε) .