

ΘΕΜΑ 2

- (1) Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.
- (α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .
- (β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
- (γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .
- (2) (α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.
- (β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.
- (i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .
- (ii) Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.
- (3) Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .
- (β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .
- (4) Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .
- (β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB .

(5) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1)

(α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και

ακτίνα $R = 2$.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, R) στο A .

ΘΕΜΑ 4

(6) Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

(γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.

(7) Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1)

και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2)

(α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1, 0)$,

$\Lambda(3, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

(β) (i) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

(ii) Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

(8) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

(α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

(9) Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

(α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .

(γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

(10) Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2 + (y+2\lambda)^2 = 1$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .

(γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.