

ΘΕΜΑ 2

(1) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

(β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(4) Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(5) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

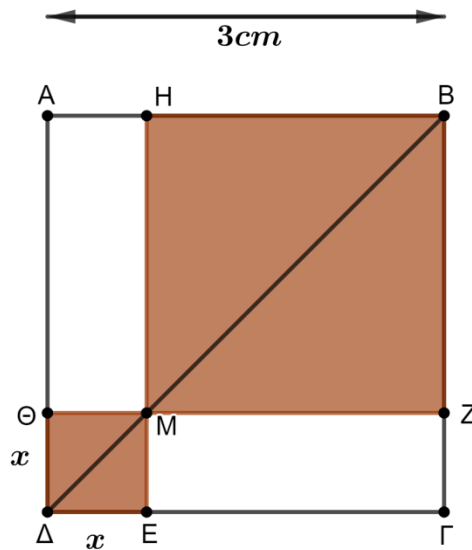
(i) τις εξισώσεις των ευθειών.

(ii) το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4

(6) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



(α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\Theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

(β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

(γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(7) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40\text{cm}$. Αν $x\text{cm}$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

(α) $0 < x < 20$.

(β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$.

(γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

(δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm .

(8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

(9) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(12) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

(γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

(13) Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

(β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση

τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

- (δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(14) Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

(β) (i) Να δείξετε ότι $A=2$.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.

(γ) (i) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3 - x$ και $g(x) = x - 1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(ii) Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$;