ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)e^{x-1}, & x<\alpha\\ x^2-2x, & x\geq\alpha\end{cases}$$, όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

(5 μον.)

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(7 μον.)

Γ3. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0<1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[x_0,\frac{3}{2}\right]$

(3 μον.)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left((\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x_0)\cdot \ell n\left|4f(x)+3\right|\right)$

(4 μον.)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f\left(e^x-x\right)+3\right)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

(6 μον.)

Θέμα Γ(μονάδες: 6+7+6+6)

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$f(x)(1-x)=x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\\ -1, & x=1\end{cases}$

και ότι $f(x)<0$ για κάθε $x>0$

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κρίσιμα σημεία

Γ3. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2, x=3$. Αν $E(\Omega)$ το εμβαδόν του παραπάνω χωρίου Ω , να αποδείξετε ότι:

$$\ln 4<E(\Omega)<\ln 3\sqrt{3}$$

Γ4. Να λυθεί στο διάστημα $(0,+\infty)$ η εξίσωση:

$$2f\left(x^2\right)=f\left(x^3\right)+f\left(x^4\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f'(x)=\frac{-1}{e^{f(x)}\cdot(x-2)^2} \text{ για κάθε } x>2 \qquad \text{και} \qquad f(3)=\ln 2$$

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-\dfrac{1}{x-2}$ είναι σταθερή.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$, για x>2.

(Μονάδες 3)

Γ2. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{3-x}{2}+\ln 2\le f(x)<\dfrac{1}{x-2}$.

(Μονάδες 4)

Γ3. Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f. Τη χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $A(3,f(3))$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Στη χρονική στιγμή αυτή να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα x'x η εφαπτομένη της C_f στο σημείο που βρίσκεται το σώμα.

(Μονάδες 6)

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(e^x+\lambda^x\right)=0$, για κάθε $\lambda>0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+\sqrt{4x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης τη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η ευθεία $(\varepsilon):y=f(1)x+f(0)-3$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g στο $x_0=0$ και $\int_0^1 f(x)dx=\alpha-e$, όπου α είναι θετικός πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $x^\alpha\le\alpha^x$ για κάθε $x>0$.

Γ1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(1)$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)<0$

Μονάδες 4

β. υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $A(\kappa,g(\kappa))$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τέτοιο τρόπο ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $K'(t)=K(t)$ μον/sec όπου t ο χρόνος . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο A τη χρονική στιγμή που $k=\sqrt{2}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

- $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\ln f(0)=f(0)-1$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=1$

Μονάδες 4

β. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν $g(x)=\ln x$, $x>0$ και $h=g\circ f$, τότε :

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτές της, εφόσον υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $h(x)<\dfrac{1}{2}x$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της h, τις ευθείες x = 0, x = 2 και τον άξονα x΄ x, να αποδείξετε δείξετε ότι : $E<1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\ln x}, x\in[1,+\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε σημείο της με τετμημένη x_0, $x_0\in(1,+\infty)$, η οποία διέρχεται από την αρχή αξόνων.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f^2(x)\le f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$, να αποδείξετε ότι $1<E<\dfrac{e^2-1}{2\sqrt{2e}}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x)=e^{x-1}-\frac{x^2}{2}+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad g(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της συνάρτησης g. (Μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη. (Μονάδες 7)

Στη συνέχεια, για $\alpha=-\dfrac{1}{2}$:

Γ3. α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$. (Μονάδες 5)

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(1-e^x)=x^3+f(0),\ x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 4)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$(x-1)f'(x)\geq f(x),\ \text{ για κάθε } x\in[1,+\infty)$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $\mathbf{A\left(2,\ \frac{3}{2}\right)}$ άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες ευθείες στην C_f τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν ε_1: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, ε_2: $y=\frac{1}{4}x+1$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1.**, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες ε_1, ε_2

Μονάδες 6

Γ3. Αν **g(x)=lnx** να προσδιορίσετε την συνάρτηση **gof** και να βρείτε την σχετική θέση των C_f και C_{gof} στο διάστημα $(0,\ +\infty)$

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης **y=g(f(x))**, **x>0** με **x=x(t)** και **y=y(t)** ως συναρτήσεις του χρόνου **t**. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης **x(t)** του Μ είναι διπλάσιος απ' τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης **y(t)**, αν υποτεθεί ότι **x΄(t)>0** για κάθε **t≥0**

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x+3$, με $A=\mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση g στο $\Delta=[0,1]$ για την οποία ισχύει :

$$\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^4=\int_0^1 (4g(x)-3)dx$$

Γ1. **(α)** Να δείξετε ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

(γ) Να χαράξετε την γραφική της παράσταση

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην f, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη ευθεία στο $M(0,f(0))$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\int_0^1 g(x)dx$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ3. Αν G μία παράγουσα της g στο Δ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y=x+G(\xi)-\xi$ να εφάπτεται στην G

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{e^x-1}=\frac{1-\int_0^1 g^4(x)dx}{x-1}$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5