

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $x \leq f(x) \leq x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) \geq \frac{3}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει: $f(x) \leq \frac{3}{4}x + 1$

(3 μον.)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{f(x)} \cdot f(\eta\mu x))$.

(4 μον.)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$, είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = x$.

(2 μον.)

Δ3. Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} = f(x) + 1$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο $(-1, 0]$.

(7 μον.)

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$,

για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- $g(x) \geq \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός
- η συνάρτηση g' είναι γνησίως μονότονη

Να αποδείξετε ότι:

α) $\lambda = 1$

(4 μον.)

β) η συνάρτηση g είναι κυρτή στο \mathbb{R}

(5 μον.)

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} όπου ισχύει :

$$f(x) e^{f(x)} = e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο \mathbb{R} (Μονάδες 8)

Δ2) Να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία της συνάρτησης f στο $A(1, f(1))$ και να δείξετε ότι $f(A) = (0, +\infty)$ (Μονάδες 7)

Δ3) Να δείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση g για την οποία ισχύει ότι:

$$0 \leq g(x) \leq (f(x) - 2018)^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{εφάπτεται στον άξονα } x'x$$

(Μονάδες 5)

Δ4) Να δείξετε ότι $I = \int_0^1 \frac{x \cdot f(x)}{(f(x) + 1)^3} dx = f(0) - \frac{1}{2}$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε :

- Η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(-2) = -4$ και $f(2) = 4$
- η g είναι κοίλη στο \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - x^2}{x-2} = f'(2) + 4$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. α. $g(2) = 1$ και $g'(2) = 2$

Μονάδες 5

β. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

Μονάδες 4

Δ2. Η $G(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-1}{x-2}, & x > 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{g(x)+1} + 3^{g(x)}}{2^{g(x)} - e^{g(x)}}, & x = 2 \end{cases}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Μονάδες 5

Δ3. α. $f(0) = 0$

Μονάδες 4

β. η εξίσωση

$$(5x-13)g(x) + f(-2x+6) = (x-2)g(4) + 1 + (x-3) \left(\int_2^4 \frac{G(x)}{x} dx - \ln 4 \right)$$

Μονάδες 7

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(2, 3)$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο \mathbb{R} , δύο φορές παραγωγίσιμη,

γνησίως φθίνουσα, κυρτή και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \ln 2}{x^2 + x} = -\frac{1}{2}$.

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν F είναι μια παράγουσα της f με $F(0)=0$, τότε να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4F(x) + x^2 - 4f(0)x}.$$

Μονάδες 7

Αν $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει :

$$f(x_0) = x_0.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι : $\int_{x_0}^{2x_0} x f'(x - x_0) dx = 2x_0^2 - x_0 \ln 2 - \int_0^{x_0} f(x) dx$, όπου

x_0 ο θετικός αριθμός του ερωτήματος Δ3.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα, και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu(f(x)) \cdot \ln \frac{1}{f(x)} \right)$

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\alpha+1, f(\alpha+1))$, όπου $\alpha > 0$

Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά. (μονάδες 4)

ii. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο, ώστε $(OAB) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \cdot g'(\xi)$,

όπου (OAB) είναι το εμβαδόν του τριγώνου OAB . (μονάδες 3)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $g(x)\ln(x+1) \leq \frac{x}{e}$, για κάθε $x > -1$.
- $g(x)(g(x) + 2x) = \frac{1}{e^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x\ln x - \frac{x^2}{2} + x$, με $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{e^2}} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(2x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{3x}{2}f'(x_0)$ για κάθε $x > 0$, όπου x_0 η θέση του σημείου καμπής.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$ έχει ακριβώς δύο

τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=1$ και $f(x)>0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- $F(x) = \frac{f^2(x)}{2} + f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, όπου F μια αρχική της f στο $[0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή. (Μονάδες 4)

Δ2. α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. (Μονάδες 3+3)

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι

$$x \cdot f'(x) + 1 \geq f(x), \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

(Μονάδες 4)

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(\eta\mu x) = 1 + \epsilon\phi x \cdot (f(\sigma\upsilon\nu x) - 1), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{2} < F(1) < f(1) + \frac{3}{2}$ (Μονάδες 5)

Δ ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $(x-1)f'(1) - \ln x \geq 0, \forall x > 0$
- $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left\{ h \left[f\left(x + \frac{1}{h}\right) - f(x) \right] \right\} = 1 - \frac{1}{x}$

Δ.1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \ln x, x > 0$ [6 μονάδες]

Δ.2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση

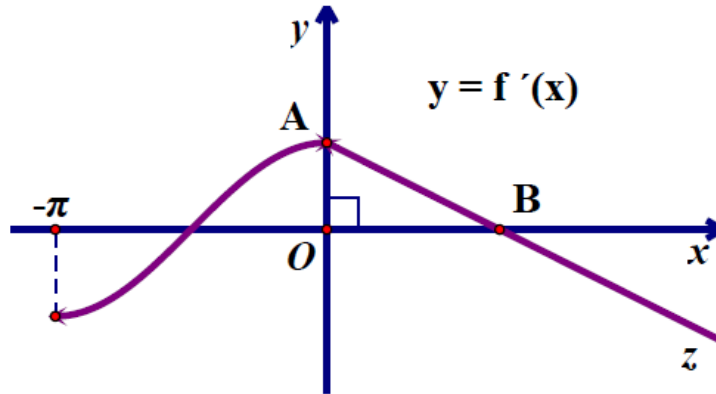
$$f(f(x) - \frac{1}{3}) = 1 \text{ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. [5 μονάδες]}$$

Δ.3. Αν $\chi_1, \chi_2 (\chi_1 < \chi_2)$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(f(x) - \frac{1}{3}) = 1$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\chi_1, \chi_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{4}{3})$.

[7 μονάδες]

Δ.4. Να αποδείξετε για οποιοδήποτε $x > 0$ ότι $f(x) - f(x - f'(x)) \leq (f'(x))^2$ [7 μονάδες]

ΘΕΜΑ Δ



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f : [-\pi, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$

Η C_f αποτελείται από δύο συνεχόμενες γραμμές, την $y=\sigma\upsilon\nu x$ με $-\pi \leq x \leq 0$ και την ημιευθεία Az που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $(OAB)=1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & x > 0 \end{cases}$

Μονάδες 5

Δ2. Αν $\alpha, \beta \in [-\pi, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $f(\beta) - f(\alpha) \leq \beta - \alpha$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\pi/8}^{-\pi/9} \frac{1}{f(x)} dx < \ln \frac{8}{9}$

Μονάδες 7

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $2018^{f^2(x)-1} = f(2) + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$ στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Μονάδες 8