

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

Αν $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, με $\hat{A} = 90^\circ$, και $A\Delta$ (u_α) είναι το ύψος του, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

➤ $AG^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$ ή $\beta^2 = \Gamma\Delta \cdot \alpha$ (Θεώρημα 1)

➤ $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ ή $\gamma^2 = B\Delta \cdot \alpha$ (Θεώρημα 1)

➤ Πόρισμα:

$$\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{AB^2}{AG^2} \quad \text{ή} \quad \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

➤ $B\Gamma^2 = AG^2 + AB^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)

➤ Αν το τρίγωνο και ισοσκελές, τότε:

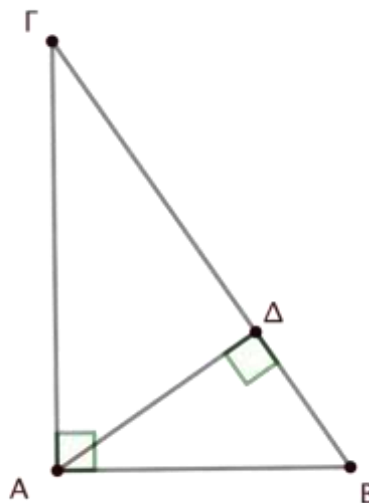
$$B\Gamma = \sqrt{2} \cdot AG \quad \text{ή} \quad \alpha = \sqrt{2} \cdot \beta \quad (\text{Εφαρμογή 1})$$

➤ $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ ή $u_\alpha^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ (Θεώρημα 4)

➤ $AB \cdot AG = B\Gamma \cdot A\Delta$ ή $\beta\gamma = \alpha u_\alpha$ (Εφαρμογή)

➤ Εφαρμογή 2:

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{u_\alpha^2}$$



Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι σε ένα ισοπλευρο τρίγωνο το ύψος του ισούται με:

$$v_{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Μετρικές σχέσεις σε τρίγωνο

- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} < 90^{\circ}$ και $A\Delta$ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στην πλευρά β , τότε ισχύει ότι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

- Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} > 90^{\circ}$ και $A\Delta$ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στην πλευρά β , τότε ισχύει ότι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

- Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \text{συν}B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \text{συν}\Gamma$$

(Νόμος των συνημιτόνων)

- Τα ύψη ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$v_{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

$$v_{\beta} = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

$$v_{\gamma} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

- Νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ.

Εμβαδά βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

- Εμβαδόν τετραγώνου:

$$E = \alpha^2$$

- Εμβαδόν ορθογωνίου:

$$E = \alpha\beta$$

- Εμβαδόν παραλληλογράμμου:

$$E = \alpha u_\alpha = \beta u_\beta$$

- Εμβαδόν τριγώνου:

$$E = \frac{\alpha u_\alpha}{2} = \frac{\beta u_\beta}{2} = \frac{\gamma u_\gamma}{2}$$

Ειδικά αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, είναι:

$$E = \frac{\beta\gamma}{2}$$

- Εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου:

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

- Εμβαδόν τραπεζίου:

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot u}{2} \quad \text{ή} \quad E = MN \cdot u$$

όπου MN είναι η διάμεσος του τραπεζίου.

- Εμβαδόν ρόμβου:

$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

όπου δ_1 και δ_2 είναι οι διαγώνιες του ρόμβου.

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

- Τύπος του Ήρωνα:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

- Αν ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε:

$$E = \tau \rho$$

- Αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε:

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

- Τριγωνομετρικός τύπος εμβαδού:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\mu\alpha = \frac{1}{2}\alpha\gamma\mu\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta\mu\gamma$$