

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^{2x} - e^x + \alpha^2 & , x < 0 \\ e^{3x} - \alpha e^{2x} + 1 & , x \geq 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

A. Να βρείτε το α , ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

B. Για $\alpha=1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

B3. Να δείξετε ότι:

i) $16f(x) \geq -2x - 4\ln 2 + 13$ για κάθε $x \in [-\ln 4, +\infty)$.

ii) $16 \int_0^1 f(x) dx > 12 - 4\ln 2$