

38. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (x \ln x - x + 1) \ln x, \quad x > 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e f(x) dx$

δ. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\frac{1}{e}, e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$

ε. Αν g μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$ με $g(e) = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(f(x))^{\frac{3}{2}} + \left(g(x) - \frac{1}{2}\right) \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 0 \quad \text{έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο } (1, e).$$

ή η εξίσωση $(f(x))^2 + \left(g(x) - \frac{1}{2}\right) f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.