

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\frac{2xf(x)-x+1}{1+(f(x))^2}=1 \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Δ2. Αν $1 < \alpha < \beta$, με $f(\alpha) < f(\beta)$, να δείξετε ότι για οποιοδήποτε $\xi \in (\alpha, \beta)$, η συνάρτηση g με $g(x) = f(\alpha) + f(\beta) - f(\xi) - f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

Αν επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-2 - \sqrt{2}) \eta \mu(2-x)}{x^2 - 3x + 2}$

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ4. Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$, $x \in [1, +\infty)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \eta \mu \frac{1007}{x})$.