

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^{x-1} - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι ισχύει $x-2 \geq -e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)e^{x-1} = 1, x \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 , που βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

γ₁) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ₂) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $(x_0-2)f(x) \geq (x_0-1)(x-x_0)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{f(x)+1} dx > \frac{3-e}{e}$.