

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln(\ln x)$, $x \in (1, +\infty)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii) Να βρείτε, όπου υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης και να γίνει η γραφική της παράσταση.

iii) Αν $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , όπου $h = g \cdot f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$, $x=e^2$.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $1 < 2 \int_e^{e+1} f(x) dx < (e+1) \cdot \ln(\ln(e+1))$.