

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta \mu x}{x^2} = 1$ και
- $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

i) $f(0) = -1$.

ii) $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 0)$.

iv) $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$.