

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^x, x > 0$ και $g(x) = \ln x, x > 0$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $K = g \circ h$.

Αν $K(x) = x \ln x - \ln(\ln x), x > 1$.

γ₁) Να δείξετε ότι η συνάρτηση K είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$, όπου $x_0 \in (1, 2)$.

γ₂) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης K .

γ₂) Να αποδείξετε ότι $K(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

γ₄) Να δείξετε $\int_e^{e^2} K(x) dx > e^3 - e^2$.

γ₅) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{K(x) - x \ln x}$