

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει $ef(x) = e + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα.

ii) Να βρείτε σημείο M της C_f , καθώς και την εφαπτομένη της στο M , που τη διαπερνά στο σημείο αυτό.

γ) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 , που βρίσκεται στο $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τον

άξονα $\psi'\psi$ είναι $E(\Omega) = \frac{(x_0 - 1)^2}{x_0}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 - \theta)x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2023}{f(x_0 + \theta)x^3 + x_0x^2 - x + 2024}$ με $\theta \in (0,1)$.

ε) i) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $-\infty$.

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη (ε), τον άξονα x' και την ευθεία $x=1$.