

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \quad \varphi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x, x \in (0,+\infty).$$

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της φ .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = x^\alpha - 1, x \in (0,+\infty)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α .

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g : (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x) \neq 0$ για

$$\text{κάθε } x \in (1,+\infty), \quad g'(e) = \frac{1}{e} \text{ και } g(e^2) = 2.$$

$$\text{Επίσης ισχύει } \int_{-g'(x)}^{xg''(x)} f(t) dt = 0 \text{ για κάθε } x \in (1,+\infty).$$

δ₁) Να βρείτε το τύπο της g .

δ₂) Αν $g(x) = \ln x, x > 1$, να βρείτε το ολοκλήρωμα $I(\lambda) = \int_{e-1}^{\lambda} g(x)f(x) dx, \lambda > e-1$ και στη

συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.