

Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = [1, 5]$, με $f(A) = [-2, 2]$.

Είναι f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 5)$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση, έστω ρ , με $\rho \in (1, 5)$.

ii) Να δείξετε ότι είναι $\rho > 3$.

iii) Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1, 5]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 5)$ στο οποίο η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

iv) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{\eta \mu x - x}{e^{f(x)} - 1}$.