

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(\ln(x+1) - \ln x) & , x \in (0, +\infty) \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να δείξετε ότι $f(x) - \frac{1}{2} \leq \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$, $\lambda > 1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε

το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \lambda}{I(\lambda)}$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x) \ln x dx < \frac{3}{2}$