

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x + 1) + \alpha x + \beta$, $x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

που έχει στο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο, το 0.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β .

β) Αν $\alpha = \frac{-3}{2}$, $\beta=1$,

β₁) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β₂) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει δυο λύσεις, μια στο διάστημα $(0,1)$ και μια στο διάστημα $(1,2)$.

β₃) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $|f'(\xi_1) + f'(\xi_2)| < -2f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2)$.

β₄) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{e^{\eta \mu^2 x} - 1}$.