

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(\ln(x+1) - \ln x) & , x \in (0, +\infty) \\ \alpha & , x = 0 \end{cases} , \alpha \in \mathbb{R} .$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να δείξετε ότι $f(x) - \frac{1}{2} \leq \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

δ₁) Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που διέρχεται από το σημείο $B(-1,0)$.

δ₂) Σημείο $M(x,\psi)$ κινείται στην εφαπτομένη (ϵ) με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)=2(e-1)$ cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MBN , όπου N η προβολή του M στον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο επαφής της (ϵ) με την C_f .