

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^2(x) + \frac{1}{16} \leq \frac{1}{2}f(x^2)$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = 0$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμα σημεία στις θέσεις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{(3)}(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.