

Λέσχη Μαθηματικών Ν.Ορεστιάδας

Επαναληπτική Άσκηση Γ Λυκείου και Λύση

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\bullet \left[(x^2 + 1)f(x) - k \right] \cdot \int_a^b e^{x^2} dx \geq 0 \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{R}, \text{ όπου } k \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός.}$$

$$\bullet f(0) + \int_0^1 \left(\frac{e^x}{x^2 + 1} - \frac{2xe^x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx - \frac{e - 2}{2} = 1$$

α) i) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

Με δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα.

β) i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx < \frac{2}{3}$.

γ) Έστω $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$ και η ευθεία $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi - 2}{4}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της F σε σημείο της, με θετική τετμημένη.

i) Να δείξετε ότι $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $\Sigma(x) = x^2 + 5x - 1 - F(x + 1), x \in [0, 3]$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\Sigma(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 3)$.

iii) Αφού δείξετε ότι $F(x) \geq x$ για κάθε $x \leq 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1 + 2 \int_{-1}^0 F(x) dx}{x + 1} + \frac{2 \int_0^1 F(x) dx + 2 - \ln 2}{x} = 0 \quad \text{έχει ακριβώς μια ρίζα στο } (-1, 0).$$