A1 Θεωρία

A2. 1) Θεωρία

2) Θεωρία

A3. α. – Λ

β. – Σ

γ. – Σ

δ. – Σ

ε. – Λ

B1. $2xf(x) - f^2(x) = x^2 - \ln^2(e^x+1) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = \ln^2(e^x+1)$

$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = \ln^2(e^x+1) \Leftrightarrow |f(x)-x| = |\ln(e^x+1)| = \ln(e^x+1)$

$e^x+1 > 1 \Rightarrow \ln(e^x+1) > 0$

Άρα $f(x) - x \neq 0$, $f(x)-x$ συνεχής, οπότε διατηρεί πρόσημο

$\lim_{x \to x_0} (f(x)-x) = -\infty$, άρα $f(x)-x<0$ κοντά στο x_0

οπότε $f(x)-x<0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, άρα $-f(x)+x = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow$

$f(x) = x - \ln(e^x+1) = \ln e^x - \ln(e^x+1) = \ln \frac{e^x}{e^x+1} = \ln \frac{e^x+1-1}{e^x+1} =$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right)$ Δηλαδή $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

B2 $\forall$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}+1} > \frac{1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e^{x_1}+1} < 1 - \frac{1}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{e^{x_1}+1}\right) < \ln\left(1 - \frac{1}{e^{x_2}+1}\right) \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$, άρα f ↑ (στο $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=1-\frac{1}{0+1}=1-1=0$$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) \overset{1-\frac{1}{e^x+1}=y}{\underset{y>0}{=\!=\!=}} \lim\limits_{y\to 0^+} \ln y=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=1-0=1 \text{ (γιατί)}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) \overset{1-\frac{1}{e^x+1}=y}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to 1} \ln y=0$

Άρα, $f(\mathbb{R})=(-\infty, 0)$

Η εξίσωση $f(x)=k^2+k-2$ έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν, $k^2+k-2\in f(\mathbb{R})$, δηλαδή $k^2+k-2<0$

-2	1
$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$	

από όπου $k\in(-2, 1)$

B3. $(x-\beta) f(e^x-\beta)+(x-a) f(e^x-a)=2023\cdot(x-a)(x-\beta)$

$\Leftrightarrow (x-\beta) f(e^x-\beta)+(x-a) f(e^x-a)-2023(x-a)(x-\beta)=0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=(x-\beta) f(e^x-\beta)+(x-a) f(e^x-a)-2023(x-a)(x-\beta)$, $x\in[a,\beta]$

g συνεχής στο $[a,\beta]$ (πράξεις συνεχών)

$g(a)=(a-\beta)f(e^a-\beta)>0$, αφού $a<\beta$ και $f(e^a-\beta)<0$

$g(\beta)=(\beta-a)f(e^\beta-a)<0$, αφού $a<\beta$ και $f(e^\beta-a)<0$

οπότε $g(a)\cdot g(\beta)<0$

Από Θ.Β υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$

Δηλαδή

$$(x_0-b)f(e^{x_0}-b)+(x_0-a)f(e^{x_0}-a)=2023(x_0-a)(x_0-b) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(e^{x_0}-b)}{x_0-a}+\frac{f(e^{x_0}-a)}{x_0-b}=2023.$$

B4. $$e^{f(-f(x))}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{\ln\left(1-\frac{1}{e^{-f(x)}+1}\right)}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$1-\frac{1}{e^{-f(x)}+1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-f(x)}+1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$e^{-f(x)}+1=3 \Leftrightarrow e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow e^{-\ln\frac{e^x}{e^x+1}}=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^{-1}}=2 \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{e^x}=2 \Leftrightarrow e^x=1=e^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$$

B5. $$3-\ln 2-\ln(e+1)-\ln(e^2+1)=$$

Είναι $f(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}=x-\ln(e^x+1)$

$f(0)=-\ln 2$, $f(1)=1-\ln(e+1)$, $f(2)=2-\ln(e^2+1)$

Άρα, $3-\ln 2-\ln(e+1)-\ln(e^2+1)=f(0)+f(1)+f(2)$

$f \uparrow$ στο $[0,2]$, άρα ισχύει $f(0)\le f(x)\le f(2)$ $\forall x\in[0,2]$ και συνεχής

Οπότε, για $x=0$ $\quad f(0)=f(0)<f(2) \quad (1)$

για $x=1$, $f(0)<f(1)<f(2)$ (2)

για $x=2$, $f(0)<f(2)=f(2)$ (3)

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 3f(0)<f(0)+f(1)+f(2)<3f(2)$

$$\Leftrightarrow f(0)<\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}<f(2)$$

Δηλαδή, $\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\in(f(0), f(2))$, οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,2)$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{2}$, μάλιστα και μοναδικό, αφού $f \uparrow$ στο $[0,2]\subset R$

Συμπέρασμα: Υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,2)$ ώστε

$$f(\xi)=\frac{3-\ln 2-\ln(e+1)-\ln(e^2+1)}{3}$$

Γ1. $D_f=(1,5)\cup(5,9]$

$f(D_f)=(-2\ 5]$

Γ2. α. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

β. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$, οπότε $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Γ3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, αφού $f(x)<0$ για $x\in(1,2)$

ενώ $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, αφού $f(x)>0$ για $x\in(2,3)$

οπότε $\nexists$ το $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$

Γ4. Η f δεν είναι συνεχής στο 3, γιατί $\nexists$ το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

και στο 7, γιατί $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=2$, ενώ $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=4$

δηλαδή $\nexists$ το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

Γ5. $-1 \le \eta\mu\frac{1}{x-6} \le 1 \iff \frac{1}{f(x)}-1 \le \frac{1}{f(x)}+\eta\mu\frac{1}{x-6} \le \frac{1}{f(x)}+1$

$\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για x κοντά στο 6

άρα $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 6} \left(\frac{1}{f(x)}-1\right)=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to 6}\left(\frac{1}{f(x)}+\eta\mu\frac{1}{x-6}\right)=+\infty$

i) Για $x=\frac{1}{5}$ έχω

$f(\frac{1}{5}) \cdot f(f(\frac{1}{5}))=1 \Leftrightarrow 5\, f(5)=1 \Leftrightarrow f(5)=\frac{1}{5}$

ii) f γνησίως μονότονη

$\frac{1}{5}<5$ ενώ $f(\frac{1}{5})>f(5)$, άρα f ↓, είναι και συνεχ

οπότε $f([\frac{1}{5},5])=[f(5), f(\frac{1}{5})]=[\frac{1}{5},5]$

iii) $a\in(\frac{1}{5},5)$, άρα υπάρχει $\xi\in(\frac{1}{5},5)$ ώστε $f(\xi)=a$

(είναι μοναδικό, αφού f ↓)

Οπότε για $x=\xi$ έχω $f(\xi) \cdot f(f(\xi))=1 \Leftrightarrow$

$a f(a)=1 \Leftrightarrow f(a)=\frac{1}{a}$.