

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2024-2025	
ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2025	
ΤΑΞΗ: Γ'	ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Έστω συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$, να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

δ) Ισχύει $(\sin x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\sin x = 0\}$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ με $\ell > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . (Μονάδες $2 \times 5 = 10$)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano. (Μονάδες 07)

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=ax+b$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 2, \quad x > 1.$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{e+1}^{e^2+1} f(x) dx = (e-1)^2 + e^2 + \frac{1}{2}.$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2).$

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό a ισχύει $f(a \ln a) \leq f(\ln a).$

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2.$

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in \mathbb{R}.$ Να αιτιολογήσετε γιατί

συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)