Έστω η παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=f(1)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα, x_0, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,\,1)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x^3-3x-1)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(\mathbb{R})=\big(-\infty,\,f(x_0)\big]$.

ii. Η εξίσωση $f(x)=-2024$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1,\,x_2$, με $x_1<x_2$.

iii. Η εξίσωση $f'(x)+f(x)+2024=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

ε) υπολογίσετε τα όρια:

i. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{f(x)}$.

ii. $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{\text{ημ}(\pi x)+\text{συν}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{f(x)-f(x_0)}$.

στ) Να αποδείξετε ότι:

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(x-1)\cdot f'(x)\le f(x)\le (x-1)\cdot f'(1)$.

ii. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$, ισχύει $-\dfrac{f'(1)}{2}<E<-\dfrac{f(2)}{2}$.