

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x \cdot \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ και $h(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$.

ii. Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $\lambda > x_0$. Να αποδείξετε ότι καθώς ο αριθμός λ αυξάνεται, το εμβαδόν $E(\lambda)$ αυξάνεται, αλλά είναι μικρότερο των $(x_0 + 1) \cdot \ln x_0 - x_0 + 1$ τετραγωνικών μονάδων.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής με τετμημένη $x_1 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

ii.
$$e < 2 \int_1^2 f(x) \, dx < e^2 \cdot \ln 2.$$