

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x+2h)}{h} = 2x \ln x + x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 0$ .

α) Να δείξετε ότι η  $C_f$  εφάπτεται του άξονα  $x'x$ .

β) Να δείξετε ότι  $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$  και να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ .

γ) Να δείξετε ότι η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x_0 - x$  (1) με  $x_0 > 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα  $(1, x_0^2)$ .

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς ένα  $\xi \in (1, \rho)$ , όπου  $\rho$  η ρίζα της (1) τέτοιο,

$$\text{ώστε } \xi^2(2 \ln \xi + 1) - 1 = \frac{x_0 - \rho}{\rho - 1} \xi.$$