

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

- $xf'(x) = (x^2 + x)e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0)=2$

i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = xe^x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iv) Να δείξετε ότι γραφική παράσταση της  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $-\infty$  και να σχεδιάσετε την  $C_f$ .

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 0)$  τέτοια, ώστε να ισχύει

$$(\xi_1 + 2)e^{\xi_1 + 2} + (\xi_2 + 2)e^{\xi_2 + 2} = 1 + e^2.$$