

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.)

[Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού του κεφ.2.5 Μέρος Β΄ του σχολικού βιβλίου].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Παράδειγμα 1.

Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5$ στο διάστημα $[-1,1]$.

- Αν ισχύουν να βρείτε $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = f(1) - f(-1)$.
- Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, είναι παράλληλη στην τέμνουσα της C_f , ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 4 = 0$.

Λύση

- Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(-1,1)$.

Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Leftrightarrow 2f'(\xi) = f(1) - f(-1) \quad (1)$$

Όμως

$$f'(x) = (x^3 + x^2 - 3x - 5)' = 3x^2 + 2x - 3$$

και

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 5 = -6$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5 = -2$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$2(3\xi^2 + 2\xi - 3) = -6 - (-2) \Leftrightarrow 3\xi^2 + 2\xi - 3 = -2 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 2\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3(-1)}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \xi = \frac{-2 \pm 4}{6} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{3} \text{ ή } \xi = -1$$

Δεκτό είναι μόνο το $\xi = \frac{1}{3}$ γιατί $-1 \notin (-1, 1)$.

ii. Η εφαπτομένη ευθεία (ε_1) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει

$$\text{συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{\varepsilon_1} = f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-6 - (-2)}{2} = -2.$$

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{2}{1} = -2 = \lambda_{\varepsilon_1}$.

Άρα η εφαπτομένη ευθεία (ε_1) της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, είναι παράλληλη της ευθείας $AB (\varepsilon)$, που ορίζουν τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$.

Μεθοδολογία

Για την εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής, αλγεβρικά και γεωμετρικά ελέγχουμε, αν ισχύουν οι προϋποθέσεις και εξάγουμε τα αλγεβρικά και γεωμετρικά συμπεράσματα.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί

τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,2]$ και να βρείτε τα σημεία $\xi \in (0,2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε $x < 1$ ως πολυωνυμική και σε κάθε $x > 1$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{3-x^2}{2} \right) = 1$ (1),
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$ (2) και
- $f(1) = 1$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Έτσι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[0,2]$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x < 1$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = -x$ και σε κάθε $x > 1$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x^2}{2(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(1-x)(1+x)}{2(x-1)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{(1+x)}{2} \right) = -1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - x}{x(x - 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1 \quad (4)$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$ δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$.

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ δηλαδή και στο $(0,2)$ με $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 1 \\ -1 & \text{αν } x = 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[0,2]$ και συνεπώς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Αν } \xi \in (0,1): -\xi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}} \text{ (δεκτό).}$$

$$\text{Αν } \xi \in (1,2): -\frac{1}{\xi^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\xi = \sqrt{2}} \text{ (δεκτό) ή } \xi = -\sqrt{2} \text{ (απορρίπτεται).}$$

Μεθοδολογία

Για τον έλεγχο των προϋποθέσεων του θεωρήματος μέσης τιμής σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου ιδιαιτέρως μελετούμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο x_0 , όπου αλλάζει μορφή ο τύπος της αν αυτό ανήκει στο διάστημα μελέτης $[a,b]$. Για τον προσδιορισμό του ξ ελέγχουμε την ύπαρξή του σε όλες τις μορφές του τύπου εντός του διαστήματος (a,b) .

ΘΕΜΑ Γ

Παράδειγμα 1.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x, & x \leq 2 \\ 8x - 16, & x > 2 \end{cases}$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

στο διάστημα $[0, 4]$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, 4)$ για τα οποία ισχύει το θεώρημα.

Λύση

Η f για $x < 2$ και $x > 2$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = (x^3 - 4x)' = 3x^2 - 4, \text{ για κάθε } x \in [0, 2) \text{ και } f'(x) = (8x - 16)' = 8, \text{ για κάθε } x \in (2, 4].$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$.

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 4x - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x(x + 2)] = 8$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8x - 16 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8(x - 2)}{x - 2} = 8$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 8$ η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 2$ με $f'(2) = 8$.

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$, με $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & 0 \leq x < 2 \\ 8, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$, άρα και συνεχής $[0, 4]$.

Επομένως η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 4]$, οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16 - 0}{4} = 4$$

- Για $0 < \xi < 2$ είναι $f'(\xi) = 3\xi^2 - 4 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \xi = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ δεκτή (} \frac{2\sqrt{6}}{3} \in (0, 2) \text{) ή } \xi = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ απορ. (} -\frac{2\sqrt{6}}{3} \notin (0, 2) \text{)}.$$

- Για $2 \leq \xi < 4$ είναι $f'(\xi) = 8$, άρα δεν υπάρχει $\xi \in [2, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4$.

Συνεπώς υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ σε συνάρτηση διπλού τύπου, πρέπει με τον ορισμό να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αλλάζει τύπο.

Παράδειγμα 2.

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ με $f(1) = -2$, $f(5) = 2$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχει εφαπτομένη (ε) της C_f τέτοια ώστε να είναι παράλληλη στην διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου.
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 5)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 2 - f'(\xi_2)$.

Λύση

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό (f είναι συνεχής στο $[1, 5]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$).

Επομένως υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

Δηλαδή υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A να είναι παράλληλη στη διχοτόμο του 1^{ου} τεταρτημορίου (συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = f'(\xi) = 1$).

- ii. Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1, 3]$ και $[3, 5]$ (3 το μέσο του διαστήματος $[1, 5]$).

Οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. ισχύουν και για τα δύο διαστήματα. Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 3)$ και $\xi_2 \in (3, 5)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - (-2)}{2} = \frac{f(3) + 2}{2}$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{2 - f(3)}{2}.$$

Άρα:

$$2 - f'(\xi_2) = 2 - \frac{2 - f(3)}{2} = \frac{2 + f(3)}{2} = f'(\xi_1).$$

Μεθοδολογία

- i. Όταν δίνεται συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, καθώς και τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ και παραλληλία ευθειών, οδηγούμαστε στην εφαρμογή του Θ.Μ.Τ, αλγεβρική και γεωμετρική.
- ii. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $f'(\kappa) + f'(\lambda)$ τότε συνήθως εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha, \mu]$ και $[\mu, \beta]$, όπου μ το μέσο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ δηλαδή $\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Παράδειγμα 3.

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και f' γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι $f(2x+3) - f(2x+7) < f(2x+1) - f(2x+5)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(2x+3) - f(2x+7) < f(2x+1) - f(2x+5) \Leftrightarrow$$

$$f(2x+3) - f(2x+1) < f(2x+7) - f(2x+5) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(2x+3) - f(2x+1)}{2} < \frac{f(2x+7) - f(2x+5)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(2x+3) - f(2x+1)}{(2x+3) - (2x+1)} < \frac{f(2x+7) - f(2x+5)}{(2x+7) - (2x+5)} \quad (1)$$

Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[2x+1, 2x+3]$ και $[2x+5, 2x+7]$ εφόσον:

- f είναι συνεχής στο $[2x+1, 2x+3]$ και στο $[2x+5, 2x+7]$,
- f παραγωγίσιμη στο $(2x+1, 2x+3)$ και στο $(2x+5, 2x+7)$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (2x+1, 2x+3)$ και $\xi_2 \in (2x+5, 2x+7)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2x+3) - f(2x+1)}{(2x+3) - (2x+1)} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2x+7) - f(2x+5)}{(2x+7) - (2x+5)}.$$

Επομένως:

$$(1) \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \stackrel{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2 \text{ που ισχύει } (\xi_1 < 2x+3 < 2x+5 < \xi_2).$$

Μεθοδολογία

Αν θέλουμε να δείξουμε μια ανισότητα και δίνεται η μονοτονία της f' , ισοδύναμα τη μετασχηματίζουμε σε άλλη της μορφής $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, οπότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ και αξιοποιούμε τα υπόλοιπα δεδομένα της άσκησης.

Παράδειγμα 4.

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[10,12]$ με $f(10), f(11), f(12)$ διαδοχικά ακέραια πολλαπλάσια του $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f'(x) - \lambda = 0$.
- ii. Υπάρχει σημείο $A(\mu, f'(\mu))$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Λύση

- i. Επειδή $f(10), f(11), f(12)$, διαδοχικά ακέραια πολλαπλάσια του λ , έχουμε:

$$f(12) - f(11) = f(11) - f(10) = \lambda.$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $[10,12]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[10, 11]$ και $[11, 12]$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (10, 11)$ και ένα τουλάχιστον $x_2 \in (11, 12)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \lambda \quad \text{και} \quad f'(x_2) = \frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} = \lambda.$$

Επομένως: $f'(x_1) = f'(x_2) = \lambda \Leftrightarrow f'(x_1) - \lambda = f'(x_2) - \lambda = 0$, δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f'(x) - \lambda = 0$ στο διάστημα $(10,12)$.

- ii. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μ τέτοιο ώστε $f''(\mu) = 0$.

Επειδή $f'(x_1) = f'(x_2) = \lambda$, f' συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[x_1, x_2] \subseteq [10,12]$.

Επομένως υπάρχει $\mu \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\mu) = 0$.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να δείξουμε συνθήκη που περιέχει f' ή f'' σκεπτόμαστε να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. ή Θ.Rolle για την f ή την f' .

Παράδειγμα 5.

Να λύσετε την εξίσωση $7^x - 6^x = 9^x - 8^x$.

Λύση

Η εξίσωση έχει προφανείς ρίζες τις $x = 0$ και $x = 1$. Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε με την μονοτονία ή με το θεώρημα Rolle να βρούμε αν έχει και άλλες ρίζες.

Ορίζουμε συνάρτηση $f(\kappa) = \kappa^x$, $\kappa > 0$ και θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[6, 7]$ και $[8, 9]$, αφού η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[6, 7]$, $[8, 9]$ και παραγωγίσιμη στα $(6, 7)$, $(8, 9)$ με $f'(\kappa) = x\kappa^{x-1}$ (1).

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (6, 7)$ και $\xi_2 \in (8, 9)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} = f(7) - f(6) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(8)}{9 - 8} = f(9) - f(8).$$

Όμως $f(7) - f(6) = f(9) - f(8)$ εφόσον $7^x - 6^x = 9^x - 8^x$.

Οπότε:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} - x\xi_2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad (\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0$$

$$\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow \xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1 \stackrel{0 < \frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1}{\Leftrightarrow} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδικές ρίζες τις $x = 0$, $x = 1$.

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε εξίσωση της μορφής: $\alpha^x - \beta^x = \gamma^x - \delta^x$, όταν $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \delta]$ στη συνάρτηση $f(\kappa) = \kappa^x$, $\kappa > 0$, από τα οποία προκύπτει $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (1), όπου $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$, και $\xi_2 \in (\gamma, \delta)$. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

A. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση f να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2, 2]$.

B. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ να προσδιορίσετε τα $\xi \in (-2, 2)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{4}$.

Λύση

A. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$ ως πολυωνυμική. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \alpha x + \beta) = \beta$ (1),
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x + 2) = 2$ (2) και
- $f(0) = \beta$ (3)

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και για να συμβεί αυτό πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Επομένως πρέπει:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ απ' όπου με τη βοήθεια των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\beta = 2$.

Έτσι η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2 & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + \alpha$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) = 3x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 + \alpha x + 2 - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x(x + \alpha)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + \alpha) = \alpha \quad (4)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 + x + 2 - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(x^2 + 1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \quad (5)$$

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και για να συμβεί αυτό πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Επομένως πρέπει και

$$\text{αρκεί } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) \text{ απ' όπου με τη βοήθεια}$$

των (4), (5) προκύπτει ότι $\boxed{\alpha = 1}$ και

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{αν } x \leq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν } x \leq 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

Β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ όπως προκύπτει από το (Α) εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-2,2]$ και έτσι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{12 - 4}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2.$$

Έτσι αν $\xi \in (-2, 0]$ είναι $f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow 2\xi + 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}}$ (απορρίπτεται) και

αν $\xi \in (0, 2)$ είναι $f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{\xi = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$ (απορρίπτεται) ή

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (δεκτό).}$$

Μεθοδολογία

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου με παραμέτρους, απαιτούμε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο x_0 όπου αλλάζει μορφή ο τύπος της, αν αυτό ανήκει στο διάστημα μελέτης $[\alpha, \beta]$. Από την προηγούμενη απαίτηση προκύπτουν σχέσεις για τις παραμέτρους τις οποίες εκμεταλλευόμαστε για τον προσδιορισμό τους.

Παράδειγμα 7.

Για μια συνάρτηση f ισχύει στο $[\alpha, \beta]$ το θεώρημα Rolle.

Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1 και ξ_2 του διαστήματος (α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Λύση

Αφού για την f ισχύει στο $[\alpha, \beta]$ το θεώρημα Rolle, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$.

Χωρίζουμε με το $\frac{\alpha+\beta}{2} \in (\alpha, \beta)$ το διάστημα $[\alpha, \beta]$ στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ σε καθένα από τα οποία φανερά εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε:

$$\begin{aligned} &= \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) + f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \\ &= \frac{-f(\alpha) + f(\beta)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 0 \end{aligned}$$

αφού $f(\alpha) = f(\beta)$.

Μεθοδολογία

Για την επιλογή των διαστημάτων εφαρμογής του Θ.Μ.Τ εργαζόμαστε ως εξής.

Αν $\kappa \in (\alpha, \beta)$, τότε μετασχηματίζοντας ισοδύναμα την αποδεικτέα έχουμε:

$$\frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\kappa - \alpha} + \frac{f(\beta) - f(\kappa)}{\beta - \kappa} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\kappa - \alpha} + \frac{f(\alpha) - f(\kappa)}{\beta - \kappa} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\kappa - \alpha} - \frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\beta - \kappa} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(\kappa) - f(\alpha)) \cdot \left(\frac{1}{\kappa - \alpha} - \frac{1}{\beta - \kappa} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(\kappa) - f(\alpha)) \cdot \left(\frac{\beta - \kappa - \kappa + \alpha}{\kappa - \alpha} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(\kappa) - f(\alpha)) \cdot \left(\frac{\beta - 2\kappa + \alpha}{\kappa - \alpha} \right) = 0$$

Από την τελευταία διαπιστώνουμε ότι ένα τέτοιο σημείο δημιουργίας των διαστημάτων

εφαρμογής του ΘΜΤ είναι το $\kappa = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Παράδειγμα 8.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 3)$. Για τη συνάρτηση f ισχύει επιπλέον $2f(2) = f(1) + f(3)$.

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Λύση

i. Λόγω των υποθέσεων, ισχύει για την f το θεώρημα της μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \quad (1)$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2) \quad (2)$$

Όμως, από τη δοθείσα ισότητα $2f(2) = f(1) + f(3)$, έχουμε $f(2) - f(1) = f(3) - f(2)$, δηλαδή τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

ii. Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 3)$, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$. Επειδή λόγω του προηγούμενου συμπεράσματος ισχύει και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, συμπεραίνουμε ότι για τη συνάρτηση f' ισχύουν στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$. Όμως $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (1, 3)$ που σημαίνει ότι $x_0 \in (1, 3)$. Άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Μεθοδολογία

Στο ερώτημα (i), η δοθείσα ισότητα $2f(2) = f(1) + f(3)$ γράφεται $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$

και μας οδηγεί στο να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Το ερώτημα (ii) μας ζητάει να δείξουμε ότι έχει λύση η εξίσωση $f''(x) = 0$, δηλαδή ότι έχει λύση η εξίσωση $(f'(x))' = 0$ και αυτό μας οδηγεί στο να εξετάσουμε αν ισχύει για την f' το θεώρημα Rolle.

Παράδειγμα 9.

Μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον η f' είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει:

$$(\gamma - \beta) \cdot f(\alpha) + (\beta - \alpha) \cdot f(\gamma) > (\gamma - \alpha) \cdot f(\beta)$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$. Αυτό σημαίνει ότι για την f ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) &\Rightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \\ &\Rightarrow (\gamma - \beta) \cdot (f(\beta) - f(\alpha)) < (\beta - \alpha) \cdot (f(\gamma) - f(\beta)) \\ &\Rightarrow (\gamma - \beta)f(\beta) - (\gamma - \beta)f(\alpha) < (\beta - \alpha)f(\gamma) - (\beta - \alpha)f(\beta) \\ &\Rightarrow (\gamma - \beta + \beta - \alpha)f(\beta) < (\gamma - \beta)f(\alpha) + (\beta - \alpha)f(\gamma) \\ &\Rightarrow (\gamma - \alpha)f(\beta) < (\gamma - \beta)f(\alpha) + (\beta - \alpha)f(\gamma) \\ &\Rightarrow (\gamma - \beta)f(\alpha) + (\beta - \alpha)f(\gamma) > (\gamma - \alpha)f(\beta) \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού είναι χρήσιμο για την απόδειξη ανισοτήτων.

Στην επιλογή του θεωρήματος αυτού στη συγκεκριμένη άσκηση μας οδηγεί η ζητούμενη ανισότητα, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

ΘΕΜΑ Δ

Παράδειγμα 1.

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, e]$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $f(1) + f(e) = 0$ (1) με $f(1) \neq f(e)$. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $[0, e]$.
- ii. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$.
- iii. Αν $f'(e) = |z^2| - 4\kappa\lambda + 1$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z = \kappa - 2\lambda i$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$.

Λύση

- i. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $O(0,0)$ ισχύει $f(0) = 0$. Αρκεί να βρούμε άλλη μια ρίζα της $f(x) = 0$.

Η σχέση (1) γίνεται ισοδύναμα:

$$f(1) = -f(e) \text{ και επειδή } f(1) \neq f(e) \Rightarrow f(1) \neq 0 \neq f(e).$$

$$\text{Άρα } f(1) \cdot f(e) = -f^2(e) < 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως παραγωγίσιμη και $f(1) \cdot f(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[0, e]$.

- ii. Επειδή $f(0) = f(x_0) = 0$, στο διάστημα $[0, x_0]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f ($[0, x_0] \subseteq [0, e]$ αφού $0 < 1 < x_0 < e$).
Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0) \subseteq (0, e)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } f'(e) &= |z^2| - 4\kappa\lambda + 1 = |(\kappa - 2\lambda i)^2| - 4\kappa\lambda + 1 = |\kappa - 2\lambda i|^2 - 4\kappa\lambda + 1 = \\ &= \left(\sqrt{\kappa^2 + 4\lambda^2}\right)^2 - 4\kappa\lambda + 1 = \kappa^2 + 4\lambda^2 - 4\kappa\lambda + 1 = (\kappa - 2\lambda)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\xi_1, e]$ ($[\xi_1, e] \subseteq [0, e]$).

Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(e) - f'(\xi_1)}{e - \xi_1} = \frac{(\kappa - 2\lambda)^2 + 1}{e - \xi_1} > 0$ (αφού $0 < \xi_1 < x_0 < e$).

Επειδή $(\xi_1, e) \subseteq (0, e)$ θα υπάρχει $\xi \in (0, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$.

Μεθοδολογία

α) Αν ζητάμε μία τουλάχιστον ρίζα της $f(x) = 0$, δουλεύουμε με Θ.Bolzano.

β) Αν ζητάμε μία τουλάχιστον ρίζα της f' ή της f'' δουλεύουμε με Θ.Rolle.

γ) Η ύπαρξη και απόδειξη ανισότητας μας οδηγεί σε μονοτονία ή σε Θ.Μ.Τ.

Παράδειγμα 2.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $2f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ να αποδείξετε ότι:

A. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2$.

B. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε $3\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\xi}\right) + 2\xi^2 = 0$.

Λύση

A. Η ζητούμενη σχέση γίνεται: $f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2 \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2} f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = -1$ απ' όπου είναι προφανές ότι η συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί είναι η $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ με $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] = \Delta$ αφού $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

- Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ (πηλίκου συνεχών) και $f(x)$ (ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$). Επομένως η g είναι συνεχής και στο $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\frac{1}{x}$ και $f(x)$. Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη και στο $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ με $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ (1).

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(2) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{2 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2} f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(2)}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2} f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2)}{3} \stackrel{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$-\frac{1}{\xi^2} f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = -1 \Leftrightarrow \boxed{f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2}$$

B. Έχουμε $3\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\xi}\right) + 2\xi^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\xi}\right) = \xi^2$. Οπότε αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με $f(x) = -\frac{3}{2}\eta\mu(\pi x)$ έχουμε:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{3\pi}{2}\sigma\upsilon\nu(\pi x)$ και
- $2f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\eta\mu 2\pi\right) - 2\left(-\frac{3}{2}\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) = 3$

Άρα σύμφωνα με το (Α) ερώτημα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2 \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\xi}\right) = \xi^2 \Leftrightarrow 3\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\xi}\right) + 2\xi^2 = 0.$$

Μεθοδολογία

Όταν ζητείται η ύπαρξη αριθμού ξ που ικανοποιεί σχέση στην οποία συμμετέχει η παράγωγος μιας συνάρτησης προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τη ζητούμενη σε μορφή $G'(x) = \kappa$ και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την G σε κατάλληλο διάστημα.

Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

A. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχουν εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της γραφικής παράστασης της f οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ ισοσκελές τρίγωνο.

B. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ όπου $\gamma \in (\alpha, \beta)$, είναι ορθογώνιο στο Γ , να δείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\rho_1) \cdot f'(\rho_2) = -1$.

Λύση

A. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον $x'x$ και θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον $x'x$ τότε για να σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο πρέπει οι γωνίες της βάσης να είναι ίσες.

Και επειδή οι γωνίες ω και θ είναι η μια εσωτερική και η άλλη εξωτερική αντίστοιχα, θα ισχύει $\omega + \theta = 180^\circ$ επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$$

Έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο (α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$ (1).

Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Επομένως θα υπάρχουν:

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2) \text{ και}$$

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) και αφού $f(\alpha) = f(\beta)$ προκύπτει η ζητούμενη $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Β. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν ρ_1, ρ_2 στο (α, β) τέτοια ώστε $f'(\rho_1) \cdot f'(\rho_2) = -1$. Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Επομένως θα υπάρχουν:

$$\rho_1 \in (\alpha, \gamma) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\rho_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \Leftrightarrow f'(\rho_1) = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} \Leftrightarrow f'(\rho_1) = \lambda_{A\Gamma} \quad (4)$$

και

$$\rho_2 \in (\gamma, \beta) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\rho_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \Leftrightarrow f'(\rho_2) = \frac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma} \Leftrightarrow f'(\rho_2) = \lambda_{\Gamma B} \quad (5)$$

όπου $\lambda_{\Gamma B}$, $\lambda_{A\Gamma}$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των ΓB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (4) και (5) και αφού $\Gamma B \perp A\Gamma$ προκύπτει

$$\boxed{f'(\rho_1) \cdot f'(\rho_2) = \lambda_{\Gamma B} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1}.$$

Μεθοδολογία

Για την ύπαρξη δύο αριθμών ξ_1, ξ_2 σε διάστημα ώστε να ικανοποιείται σχέση με παράγωγο συνήθως εφαρμόζουμε κάποιο από τα βασικά θεωρήματα (εδώ εφαρμόσαμε το Θ.Μ.Τ) σε δύο υποδιαστήματα του αρχικού, χωρίς κοινά στοιχεία. Αν τα δεδομένα της άσκησης υποδεικνύουν τον σχηματισμό των υποδιαστημάτων (βλέπε Β: $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$) τότε εργαζόμαστε σε αυτά. Διαφορετικά αναζητούμε το σημείο γ ανάλογα με την ζητούμενη (μια καλή επιλογή είναι το

μέσο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ή ο σταθμικός μέσος $\frac{\kappa\alpha+\lambda\beta}{\kappa+\lambda}$).

Παράδειγμα 4.

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f .

A. Αν $f(19) = f(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$.

B. Αν $4f(19) - 2f(1) = f(13) + f(7)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (1, 19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\rho_1) + 3f'(\rho_2) + 4f'(\rho_3) = 0$.

Λύση

A. Το μήκος του διαστήματος $[1, 19]$ είναι $\kappa = 19 - 1 = 18$. Χωρίζουμε το διάστημα $[1, 19]$ σε τρία υποδιαστήματα των οποίων τα μήκη να είναι ανάλογα των συντελεστών 2, 3, 4 της ζητούμενης (μερισμός σε μέρη ανάλογα, Α' Γυμνασίου). Είναι:

$$C_1 = \frac{2}{2+3+4} \cdot 18 = \frac{2}{9} \cdot 18 = 4, \quad C_2 = \frac{3}{2+3+4} \cdot 18 = \frac{3}{9} \cdot 18 = 6, \quad C_3 = \frac{4}{2+3+4} \cdot 18 = \frac{4}{9} \cdot 18 = 8$$

$$\text{Δηλαδή } \Delta_1 = [1, 1+4] = [1, 5], \quad \Delta_2 = [5, 5+6] = [5, 11], \quad \Delta_3 = [11, 11+8] = [11, 19].$$

Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 5]$, $[5, 11]$ και $[11, 19]$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 19)$, συνεχής στο $[1, 19]$.

Επομένως θα υπάρχουν:

$$\xi_1 \in (1, 5) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_1) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \Leftrightarrow 2f'(\xi_1) = \frac{f(5) - f(1)}{2} \quad (1) \text{ και}$$

$$\xi_2 \in (5, 11) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_2) = \frac{f(11) - f(5)}{11 - 5} \Leftrightarrow 3f'(\xi_2) = \frac{f(11) - f(5)}{2} \quad (2)$$

$$\xi_3 \in (11, 19) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_3) = \frac{f(19) - f(11)}{19 - 11} \Leftrightarrow 4f'(\xi_3) = \frac{f(19) - f(11)}{2} \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) και αφού $f(1) = f(19)$ προκύπτει η ζητούμενη $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$.

B. Τα δεδομένα υποδεικνύουν διαμέριση του διαστήματος $[1, 19]$ στα υποδιαστήματα $[1, 7]$, $[7, 13]$, $[13, 19]$.

Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 7]$, $[7, 13]$ και $[13, 19]$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 19)$, συνεχής στο $[1, 19]$.

Επομένως θα υπάρχουν:

$$\rho_1 \in (1, 7) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\rho_1) = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} \Leftrightarrow 2f'(\rho_1) = \frac{2f(7) - 2f(1)}{6} \quad (4) \text{ και}$$

$$\rho_2 \in (7,13) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\rho_2) = \frac{f(13)-f(7)}{13-7} \Leftrightarrow 3f'(\rho_2) = \frac{3f(13)-3f(7)}{6} \quad (5)$$

$$\rho_3 \in (13,19) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\rho_3) = \frac{f(19)-f(13)}{19-13} \Leftrightarrow 4f'(\rho_3) = \frac{4f(19)-4f(13)}{6} \quad (6)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4), (5) και (6) και αφού $4f(19) - 2f(1) = f(13) + f(7)$ προκύπτει η ζητούμενη $2f'(\rho_1) + 3f'(\rho_2) + 4f'(\rho_3) = 0$.

Μεθοδολογία

Η συνθήκη $\kappa f'(\xi_1) + \lambda f'(\xi_2) + \mu f'(\xi_3) = 0$ συχνά αντιμετωπίζεται με διαμέριση του διαστήματος εργασίας σε διαδοχικά διαστήματα πλάτους αναλόγου των συντελεστών κ, λ, μ και εφαρμογή σε αυτά κάποιου από τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού (στο συγκεκριμένο παράδειγμα Θ.Μ.Τ.) .

Παράδειγμα 5.

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη, παραγωγίσιμη και θετική σ' ένα διάστημα Δ . Αν η συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (*) είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$

$$\text{με } \alpha < \beta \text{ ισχύει } \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} < \frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta - \alpha} < \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

B. Αποδείξτε ότι $\varepsilon\varphi\alpha < \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta - \alpha} < \varepsilon\varphi\beta, \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$

Λύση

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$ η οποία είναι καλώς ορισμένη στο Δ , αφού η $f(x)$ είναι θετική στο Δ . Επιπλέον:

- g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως σύνθεση των συνεχών $\ln x$ και $f(x)$.
- g παραγωγίσιμη στο (α, β) ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\ln x$ και $f(x)$
με $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \alpha < \xi < \beta \xLeftrightarrow[\text{h γν. φθίνουσα}] h(\alpha) > h(\xi) > h(\beta) \xLeftrightarrow[*] \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} > \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} > \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} \xLeftrightarrow[(1)]$$

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} < \frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta - \alpha} < \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}$$

B. Εφαρμογή του (A) ερωτήματος για $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ (2) η οποία είναι θετική και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επίσης είναι $h(x) = \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\varepsilon\varphi x$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ όπως εύκολα προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού. Επομένως η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιεί όλες τις

$$\text{προϋποθέσεις του (A) και συνεπώς θα ισχύει } -\varepsilon\varphi\beta < \frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta - \alpha} < -\varepsilon\varphi\alpha \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_{f\alpha} < -\frac{\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha))}{\beta - \alpha} < \varepsilon_{f\beta} \Leftrightarrow \varepsilon_{f\alpha} < \frac{\ln(f(\alpha)) - \ln(f(\beta))}{\beta - \alpha} < \varepsilon_{f\beta} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\varepsilon_{f\alpha} < \frac{\ln(\sigma_{\alpha}) - \ln(\sigma_{\beta})}{\beta - \alpha} < \varepsilon_{f\beta}.$$

Μεθοδολογία

Όταν έχουμε να αποδείξουμε ανίσωση της μορφής $A < \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} < B$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ.

για την F στο $[\alpha, \beta]$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ισοδύναμή της

$A < F'(\xi) < B$ όπου το ξ είναι το σημείο του (α, β) που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. Συνήθως μετασχηματίζουμε την ανίσωση $\alpha < \xi < \beta$ στην $A < F'(\xi) < B$.

Παράδειγμα 6.

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$.

B. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Λύση

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = e^t$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbb{R}$ με $f'(t) = e^t$ και επομένως εφαρμόζεται γι' αυτή το Θ.Μ.Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha, \beta]$. Έτσι:

- Αν $x > 0$ σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = e^t$ στο $[0, x]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1).$$

Όμως

$$0 < \xi < x \stackrel{e^x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} e^0 < e^\xi < e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow x + 1 < e^x < xe^x + 1.$$

- Αν $x < 0$ σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = e^t$ στο $[x, 0]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x, 0) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^0 - e^x}{-x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (2).$$

Όμως

$$x < \xi < 0 \stackrel{e^x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} e^x < e^\xi < e^0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow x + 1 < e^x < xe^x + 1.$$

- Αν $x = 0$ η ζητούμενη ισχύει προφανώς ως ισότητα.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Από το ερώτημα (A) έχουμε:

- Αν $x < 0$ είναι $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ οπότε από κριτήριο

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Αν $x > 0$ είναι $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ οπότε από κριτήριο

παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Μεθοδολογία

Αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f , σε διάστημα με μεταβλητά άκρα τύπου $[g(x), h(x)]$ προκύπτει ανισότητα η οποία συνδυάζεται με το κριτήριο της παρεμβολής για τον υπολογισμό ορίου.

Παράδειγμα 7.

Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [0, 1]$ και ισχύει $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1 - x_0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Λύση

i. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 1 - x$ έχει λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1 + x$ / $x \in [0, 1]$.

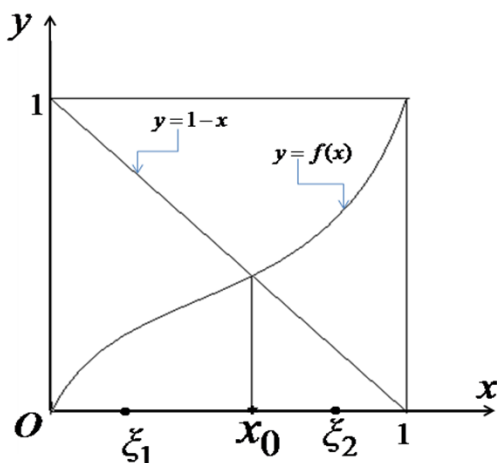
Για τη συνάρτηση g , ισχύουν στο κλειστό διάστημα $\Delta = [0, 1]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano, αφού είναι συνεχής στο $\Delta = [0, 1]$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων f και $h(x) = -1 + x$

$$g(0) \cdot g(1) = (-1) \cdot (1) < 0.$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} g(x_0) = 0 &\Leftrightarrow f(x_0) - 1 + x_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x_0) = 1 - x_0 \end{aligned}$$

Παρακάτω δίνεται μια γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος.



ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta_1 = [0, x_0] \subset [0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0) \subset (0, 1)$. Επομένως ισχύει για την f το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1 - x_0}{x_0} \quad (1)$$

Ομοίως υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - 1 + x_0}{1 - x_0} = \frac{x_0}{1 - x_0} \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{1 - x_0}{x_0} \cdot \frac{x_0}{1 - x_0} = 1$$

Μεθοδολογία

Το γεγονός ότι στην άσκηση δίνεται το πρώτο ερώτημα, μας διευκολύνει στη λύση της. Πώς όμως θα μπορούσαμε από μόνοι μας να οδηγηθούμε στην αναζήτηση του σημείου $x_0 \in (0, 1)$, προκειμένου να απαντήσουμε στο (ii) ερώτημα της άσκησης;

Θα αναζητούσαμε σημείο $\kappa \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa - 0} \cdot \frac{f(1) - f(\kappa)}{1 - \kappa} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\kappa)}{\kappa} \cdot \frac{1 - f(\kappa)}{1 - \kappa} = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(\kappa)(1 - f(\kappa)) = \kappa(1 - \kappa) \Leftrightarrow$$

$$(f(\kappa) - \kappa)(1 - \kappa - f(\kappa)) = 0$$

Από την τελευταία ισότητα διαπιστώνουμε ότι ένα σημείο που μπορεί να μας οδηγήσει σε λύση είναι το σημείο $\kappa \in (0, 1)$ με την ιδιότητα $f(\kappa) = 1 - \kappa$.

Παράδειγμα 8.

Για μια συνάρτηση f υποθέτουμε ότι:

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- $f(0) = 0$.
- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

i. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, δείξτε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση φ σε ένα διάστημα Δ για την οποία ισχύει ότι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , δείξτε ότι:

$$f(\alpha^2) > \alpha \cdot f(\alpha) > \alpha^2 \cdot f(1) \text{ για } \alpha > 1.$$

Λύση

i. Για κάθε $x > 0$, είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x} \right) = \frac{1}{x} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right) \end{aligned}$$

Όμως ισχύει για την f στο διάστημα $[0, x]$ το θεώρημα της μέσης τιμής, οπότε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi), \text{ για κάποιο } \xi \in (0, x).$$



Επομένως $g'(x) = \frac{1}{x} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right) = \frac{1}{x} (f'(x) - f'(\xi))$. Επειδή όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα

στο $(0, +\infty)$ και $0 < \xi < x$, έχουμε $f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} (f'(x) - f'(\xi)) > 0$,

δηλαδή $g'(x) = \frac{1}{x}(f'(x) - f'(\xi)) > 0$ στο $(0, +\infty)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Επειδή $\alpha > 1$ και $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε:

$$\alpha^2 > \alpha > 1 \Rightarrow g(\alpha^2) > g(\alpha) > g(1) \Rightarrow$$

$$\frac{f(\alpha^2)}{\alpha^2} > \frac{f(\alpha)}{\alpha} > \frac{f(1)}{1} \Rightarrow f(\alpha^2) > \alpha \cdot f(\alpha) > \alpha^2 \cdot f(1)$$

Σημείωση: Η απόδειξη της πρότασης του (ii) ερωτήματος παρουσιάζεται στην Ενότητα 8.

Μεθοδολογία

Ύστερα από τον υπολογισμό της $g'(x)$, πρέπει να αξιοποιήσουμε τις δυο άλλες υποθέσεις της άσκησης, ότι δηλαδή:

- $f(0) = 0$ και
- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Αυτό γίνεται με το να γράψουμε την $g'(x)$ στη μορφή $g'(x) = \frac{1}{x} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right)$

και στη συνέχεια να παρατηρήσουμε ότι $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$, για κάποιο $\xi \in (0, x)$.

Φυσιολογικά κατόπιν χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της f' .

Γενικότερα και σε ανάλογες περιπτώσεις, κάνουμε χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής για μια συνάρτηση f σε κατάλληλο διάστημα $[\alpha, \beta]$, της μονοτονίας της f' και αξιοποιούμε το γεγονός ότι για το σημείο ξ που επαληθεύει το θεώρημα ισχύει $\alpha < \xi < \beta$.

Παράδειγμα 9.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $99^\lambda + 102^\lambda = 100^\lambda + 101^\lambda$.

Λύση

Έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση με άγνωστο το λ .

Παρατηρούμε ότι οι όροι της εξίσωσης είναι οι τιμές της συνάρτησης $f(x) = x^\lambda$, $x > 0$, για $x = 99$, $x = 102$, $x = 100$ και $x = 101$ αντιστοίχως.

Η εξίσωση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$99^\lambda + 102^\lambda = 100^\lambda + 101^\lambda \Leftrightarrow 100^\lambda - 99^\lambda = 102^\lambda - 101^\lambda$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^\lambda$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ οπότε εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στα διαστήματα $[99, 100]$ και $[101, 102]$. Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (99, 100)$ και $\xi_2 \in (101, 102)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(100) - f(99)}{100 - 99} = f(100) - f(99) = 100^\lambda - 99^\lambda \quad (1)$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(102) - f(101)}{102 - 101} = f(102) - f(101) = 102^\lambda - 101^\lambda \quad (2)$$

$$\text{Όμως } f'(x) = (x^\lambda)' = \lambda \cdot x^{\lambda-1}.$$

$$\text{Επομένως } f'(\xi_1) = \lambda \cdot \xi_1^{\lambda-1} \text{ και } f'(\xi_2) = \lambda \cdot \xi_2^{\lambda-1}.$$

Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\lambda \cdot \xi_1^{\lambda-1} = \lambda \cdot \xi_2^{\lambda-1} \Leftrightarrow \lambda \cdot (\xi_1^{\lambda-1} - \xi_2^{\lambda-1}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \xi_1^{\lambda-1} - \xi_2^{\lambda-1} = 0$$

Έχουμε:

$$\xi_1^{\lambda-1} - \xi_2^{\lambda-1} = 0 \Leftrightarrow \xi_1^{\lambda-1} = \xi_2^{\lambda-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi_1^{\lambda-1}}{\xi_2^{\lambda-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{\lambda-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα οι ζητούμενες τιμές του είναι $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$.

Μεθοδολογία

Ο μετασχηματισμός της εξίσωσης στη μορφή $\frac{100^\lambda - 99^\lambda}{100 - 99} = \frac{102^\lambda - 101^\lambda}{102 - 101}$ είναι που μας οδηγεί

στο να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = x^\lambda$, στα διαστήματα $[99, 100]$ και $[101, 102]$.

Παράδειγμα 10.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2 στο διάστημα $[0, 1]$, τέτοιοι ώστε:

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$$

Λύση

Έστω κ ένας αριθμός του διαστήματος $(0, 1)$ για τον οποίο ισχύει $f(\kappa) = \frac{1}{2}$. Η ύπαρξη του αριθμού αυτού εξασφαλίζεται από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών των συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα.

Για τη συνάρτηση f ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $[0, \kappa]$, και $[\kappa, 1]$ το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Επομένως υπάρχουν $x_1 \in (0, \kappa)$ και $x_2 \in (\kappa, 1)$, τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\kappa} = \frac{1}{2\kappa}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(\kappa)}{1 - \kappa} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \kappa} = \frac{1}{2(1 - \kappa)}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2\kappa + 2(1 - \kappa) = 2.$$

Μεθοδολογία

Ποιά ήταν η ιδέα που μας οδήγησε στο να διαιρέσουμε το διάστημα του συνόλου τιμών της συνάρτησης σε δυο υποδιαστήματα ίσου μήκους;

Αναζητούμε ένα σημείο κ στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή $\kappa \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa - 0}} + \frac{1}{\frac{f(1) - f(\kappa)}{1 - \kappa}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa}{f(\kappa)} + \frac{1 - \kappa}{1 - f(\kappa)} = 2$$

Εκτελούμε τις πράξεις στην τελευταία παράσταση, και με παραγοντοποίηση βρίσκουμε $[\kappa - f(\kappa)] \cdot [1 - 2f(\kappa)] = 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν μπορούμε να επιλέξουμε ένα κ στο $(0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) = \frac{1}{2}$, το πρόβλημα έχει λυθεί. Μια τέτοια επιλογή του κ μπορεί να γίνει σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 1/9/2011