

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.)

[Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού του κεφ.2.5 Μέρους Β' του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{\pi} \eta\mu(\pi x), & x \leq 0 \\ x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[-2, 2]$ και να βρείτε τα σημεία $\xi \in (-2, 2)$ για τα οποία ισχύει.

Λύση

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x < 0$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και σε κάθε $x > 0$ ως πολυωνυμική. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{\pi} \eta\mu(\pi x) \right) = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x) = 0$ και
- $f(0) = 0$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Έτσι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[-2, 2]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x < 0$ με $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu(\pi x)$ και σε κάθε $x > 0$ με $f'(x) = 2x + 2$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x + \frac{1}{\pi} \eta\mu(\pi x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x} \right) = 2,$$

$$(\text{διότι: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x} \stackrel{\pi x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x(x+2)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 2 = f'(0) \text{ δηλαδή η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

και στο $x_0 = 0$. Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $(-2, 2)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \sin(\pi x) & \text{αν } x < 0 \\ 2 & \text{αν } x = 0 \\ 2x + 2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[-2, 2]$ και συνεπώς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{8 - (-2)}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{5}{2}$$

Προσδιορισμός του ξ : Προφανώς $\xi \neq 0$ αφού $f'(0) = 2 \neq \frac{5}{2}$.

$$\text{Αν } \xi \in (-2, 0): 1 + \sin(\pi \xi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \sin(\pi \xi) = \frac{3}{2} > 1 \text{ αδύνατον.}$$

$$\text{Αν } \xi \in (0, 2): 2\xi + 2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{4}} \text{ (δεκτό).}$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ με $\alpha < \beta$ είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 + e^x$ τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$.
- ii. Να προσδιορίσετε το ξ του θεωρήματος και να αποδείξετε ότι $\alpha\beta < 0$.

Λύση

Επειδή τα σημεία A και B είναι κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας (ε) θα ισχύει: $\alpha^2 + e^\alpha = \alpha + 3$ (1) και $\beta^2 + e^\beta = \beta + 3$ (2).

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\alpha, \beta]$, ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων x^2 και e^x . Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = 2x + e^x$.

Επομένως η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ii. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{(\beta^2 + e^\beta) - (\alpha^2 + e^\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{(\beta + 3) - (\alpha + 3)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = 1.$$

Προσδιορισμός του ξ :

$$\text{Είναι } f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow 2\xi + e^\xi = 1 \quad (3).$$

Προφανής λύση της (3) είναι $\xi = 0$ (4), η οποία είναι και μοναδική, αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) (αν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$ τότε $2x_1 < 2x_2$ και $e^{x_1} < e^{x_2}$ δηλαδή $2x_1 + e^{x_1} < 2x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$).

Επιπλέον $\xi \in (\alpha, \beta)$ δηλαδή $\alpha < \xi < \beta \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \alpha < 0 < \beta$, οπότε $\alpha\beta < 0$.

Άσκηση 2.

A. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση

$$f(x) = |x-1|\ln x \text{ στο διάστημα } \left[\frac{1}{e}, e\right].$$

B. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ ώστε $\xi(\xi-1)\ln \xi + (\xi-1)^2 = \xi|\xi-1|$.

Λύση

A. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ ως γινόμενο των συνεχών $|x-1|$ και $\ln x$.

$$\text{Για τον έλεγχο της παραγώγου έχουμε } f(x) = \begin{cases} -(x-1)\ln x & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αν } x = 1 \\ (x-1)\ln x & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Αν } x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \text{ είναι } f'(x) = (-(x-1)\ln x)' = -(x-1)'\ln x - (x-1)(\ln x)' = -\ln x - \left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$$\text{Αν } x \in (1, e) \text{ είναι } f'(x) = ((x-1)\ln x)' = (x-1)'\ln x + (x-1)(\ln x)' = \ln x + \left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$$(\text{Τα δύο αποτελέσματα συγχωνεύονται στην } f'(x) = \frac{(x-1)}{|x-1|} \ln x + \left(\frac{|x-1|}{x}\right))$$

Για την παράγωγο στο $1 \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{|x-1|\ln x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(x-1)\ln x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\ln x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{|x-1|\ln x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{(x-1)\ln x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = 0 = f'(1)$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ επομένως είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{e}, e\right)$.

Συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Β. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{e - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{|e-1| \ln e - \left|\frac{1}{e}-1\right| \ln \frac{1}{e}}{e - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{(e-1) - \left(\frac{1}{e}-1\right)}{e - \frac{1}{e}} \Leftrightarrow f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\xi-1)}{|\xi-1|} \ln \xi + \frac{|\xi-1|}{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi(\xi-1) \ln \xi + (\xi-1)^2 = \xi |\xi-1|.$$

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5}, & x \leq 2 \\ -x^2 + \alpha x + \beta, & x > 2 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε

τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση f να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2, 3]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x < 2$ ως σύνθεση των συνεχών $x^2 + 5$ (πολυωνυμική) και $\sqrt{x}$. Επίσης είναι συνεχής σε κάθε $x > 2$ ως πολυωνυμική για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-2, 3]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-2, 3]$ και για να συμβεί αυτό πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Επομένως πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{x^2+5}) = 3$ (1),
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + \alpha x + \beta) = -4 + 2\alpha + \beta$ (2) και
- $f(2) = 3$ (3)

Επομένως πρέπει $-4 + 2\alpha + \beta = 3 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 7 - 2\alpha}$ (4).

Έτσι η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5}, & x \leq 2 \\ -x^2 + \alpha x + 7 - 2\alpha, & x > 2 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x < 2$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $x^2 + 5$ (πολυωνυμική) και $\sqrt{x}$ με $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$. Επίσης είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x > 2$ ως

πολυωνυμική για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2x + \alpha$. Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[-2, 3]$ πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 3)$ και για να συμβεί αυτό πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. Επομένως πρέπει και αρκεί $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = f'(2)$. Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$\left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = f'(2)$. Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 + 5 - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-x^2 + \alpha x + 7 - 2\alpha - 3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-x^2 + 4 + \alpha x - 2\alpha}{x-2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-(x-2)(x+2) + \alpha(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x - 2 + \alpha) = -4 + \alpha$$

$$\text{Άρα πρέπει και αρκεί } -4 + \alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{14}{3}} \text{ και από την (4) είναι } \beta = 7 - \frac{28}{3} \Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{7}{3}}.$$

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x + \eta\mu(\alpha x), & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + \beta^2} - 4\pi, & x > 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2\pi, 3\pi]$ να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

Λύση

Επειδή η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2\pi, 3\pi]$ θα είναι συνεχής σ' αυτό και επομένως θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Οπότε θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + \eta\mu(\alpha x)) = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + \beta^2} - 4\pi) = (\sqrt{\beta^2} - 4\pi) = |\beta| - 4\pi$ και
- $f(0) = 0$

Επομένως $|\beta| - 4\pi = 0 \Leftrightarrow |\beta| = 4\pi \Leftrightarrow \boxed{\beta = \pm 4\pi}$ (2).

Επειδή η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-2\pi, 3\pi]$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $(-2\pi, 3\pi)$ και επομένως θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$. Οπότε θα ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$. Στο $x_0 = 0$ είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x + \eta\mu(\alpha x) - 0}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 + \alpha \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} \right) = 2 + \alpha$ (3)

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} \stackrel{\text{θέτω } u = \alpha x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x^2 + \beta^2} - 4\pi}{x} \right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 16\pi^2} + 4\pi)} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16\pi^2} + 4\pi} \right) = 0 \quad (4)$$

Επομένως $2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2}$.

Άσκηση 5.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x, & x \leq 0 \\ xe^x + \beta, & x > 0 \end{cases}$.

A. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς α, β , $\alpha \neq 0$, ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-1, 1]$.

B. Αν $\alpha = e$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$ (δηλαδή ότι το ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. για την f στο $(-1, 1)$ είναι μοναδικό).

Λύση άσκησης 6

A. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x < 0$ ως πολυωνυμική και σε κάθε $x > 0$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 + x) = 0 \quad (1)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + \beta) = \beta \quad \text{και} \quad (2)$
- $f(0) = 0 \quad (3)$

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και για να συμβεί αυτό πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Επομένως πρέπει

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ απ' όπου με τη βοήθεια των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\boxed{\beta = 0}$.

Έτσι η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x & \alpha \forall \quad x \leq 0 \\ xe^x & \alpha \forall \quad x > 0 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x < 0$ με $f'(x) = 2\alpha x + 1$ και σε κάθε $x > 0$ με $f'(x) = xe^x + e^x$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\alpha x^2 + x - 0}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x(\alpha x + 1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + 1) = 1 \quad (4)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^x - 0}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x) = 1 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1$ οπότε η f

είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \\ xe^x + e^x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

B. Αν $\alpha = e$ τότε είναι $f(x) = \begin{cases} ex^2 + x, & x \leq 0 \\ xe^x & x > 0 \end{cases}$ και $f'(x) = \begin{cases} 2ex + 1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \\ xe^x + e^x & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Από το (A) ερώτημα, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-1, 1]$ και συνεπώς

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{e - (e - 1)}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{2}$

Προφανώς $\xi \neq 0$ αφού $f'(0) = 1 \neq \frac{1}{2}$.

Αν $\xi \in (-1, 0)$ τότε: $f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e\xi + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e\xi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{4e}$ (δεκτή τιμή)

Ενώ δεν υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi e^\xi + e^\xi = \frac{1}{2}$, διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f'(x) = xe^x + e^x$ έχουμε ότι, όπως εύκολα προκύπτει με την εφαρμογή του ορισμού, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και συνεπώς για $\xi \in (0, 1)$ θα ισχύει

$\xi > 0 \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(0) \Leftrightarrow f'(\xi) > 1 > \frac{1}{2}$.

Επομένως το ξ του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $(-1, 1)$ είναι μοναδικό.

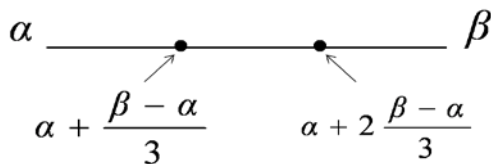
Άσκηση 6.

Για μια συνάρτηση ισχύει στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ το θεώρημα Rolle.

- i. Να βρείτε τα σημεία που διαιρούν το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία διαστήματα ίσου μήκους.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία ξ_1 , ξ_2 και ξ_3 του διαστήματος (α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$.

Λύση

i. Για να χωρίσουμε το $[\alpha, \beta]$ σε τρία τμήματα χρειαζόμαστε δυο εσωτερικά σημεία. Το μήκος του κάθε τμήματος, αφού είναι ισομήκη, θα είναι ίσο με $\frac{\beta - \alpha}{3}$. Επομένως τα ζητούμενα σημεία θα είναι το $\alpha + \frac{\beta - \alpha}{3} = \frac{2\alpha + \beta}{3}$ και το $\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{3} = \frac{\alpha + 2\beta}{3}$.



ii. Επειδή για την f ισχύει στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ το θεώρημα Rolle, θα ισχύει και το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3}\right]$, $\left[\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3}\right]$ και $\left[\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta\right]$.

Επομένως υπάρχουν σημεία $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{2\alpha + \beta}{3}\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)$ και $\xi_3 \in \left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2\alpha + \beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{3}} \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \frac{2\alpha+\beta}{3}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (2)$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \quad (3)$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) και (3) και έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) &= \\ &= \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) + f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \\ &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} = 0, \text{ αφού } f(\alpha) = f(\beta). \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Όπως φαίνεται και στην επίλυση του προβλήματος, δεν είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός των σημείων που διαιρούν το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία υποδιαστήματα ίσου μήκους. Αρκεί να γνωρίζουμε ότι το μήκος του καθενός είναι $\frac{\beta-\alpha}{3}$.

Άσκηση 7.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 10]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 10)$ και τέτοια ώστε $f(0) = 5$ και $f(10) = 20$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10}$ που ανήκουν στο διάστημα $(0, 10)$, τέτοιοι ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_{10}) = 15$.

Λύση

Για τη συνάρτηση f ισχύει σε καθένα από τα δέκα διαστήματα $[0, 1], [1, 2], [2, 3], \dots, [9, 10]$ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Επομένως υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{10}$ των διαστημάτων $(0, 1), (1, 2), \dots, (9, 10)$ αντιστοίχως, τέτοιοι ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

$$f'(\xi_2) = f(2) - f(1)$$

$\vdots$

$$f'(\xi_{10}) = f(10) - f(9)$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη και έχουμε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_{10}) = f(10) - f(0) = 20 - 5 = 15.$$

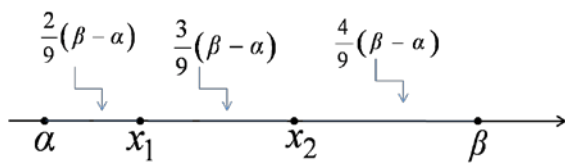
Άσκηση 8.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και τέτοια ώστε $f(\beta) - f(\alpha) = 4(\beta - \alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2, ξ_3 που ανήκουν στο διάστημα (α, β) , τέτοιοι ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 36$.

Λύση

Με τα σημεία x_1, x_2 χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε τρία υποδιαστήματα με μήκη

$$(x_1 - \alpha) = \frac{2}{9}(\beta - \alpha), \quad (x_2 - x_1) = \frac{3}{9}(\beta - \alpha) \quad \text{και} \quad (\beta - x_2) = \frac{4}{9}(\beta - \alpha).$$



Σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_1]$, $[x_1, x_2]$ και $[x_2, \beta]$ ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Επομένως υπάρχει σημείο $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{\frac{2}{9}(\beta - \alpha)} = \frac{9(f(x_1) - f(\alpha))}{2(\beta - \alpha)}, \quad \text{οπότε}$$

$$2f'(\xi_1) = \frac{9(f(x_1) - f(\alpha))}{(\beta - \alpha)} \quad (1)$$

Ομοίως υπάρχουν σημεία $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_3 \in (x_2, \beta)$ τέτοια ώστε

$$3f'(\xi_2) = \frac{9(f(x_2) - f(x_1))}{(\beta - \alpha)} \quad (2)$$

$$\text{και} \quad 4f'(\xi_3) = \frac{9(f(\beta) - f(x_2))}{(\beta - \alpha)} \quad (3)$$

Προσθέτουμε τις (1), (2) και (3) κατά μέλη και έχουμε

$$\begin{aligned} 2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) &= \frac{9(f(x_1) - f(\alpha))}{(\beta - \alpha)} + \frac{9(f(x_2) - f(x_1))}{(\beta - \alpha)} + \frac{9(f(\beta) - f(x_2))}{(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{9(f(x_1) - f(\alpha) + f(x_2) - f(x_1) + f(\beta) - f(x_2))}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{9(f(\beta) - f(\alpha))}{\beta - \alpha} = \frac{9 \cdot 4(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = 36 \end{aligned}$$

Άσκηση 9.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\gamma) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)(\beta - \gamma) + f(\beta)(\gamma - \alpha) < 0$.

Λύση

Στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και επομένως υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{0 - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{-f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \quad (1)$$

Ομοίως, στο διάστημα $[\gamma, \beta]$ εφαρμόζεται το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και επομένως υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{f(\beta) - 0}{\beta - \gamma} = \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} \quad (2)$$

Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, έχουμε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$. Επομένως

$$\frac{-f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} \Rightarrow -f(\alpha) \cdot (\beta - \gamma) > f(\beta) \cdot (\gamma - \alpha)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) \cdot (\beta - \gamma) + f(\beta) \cdot (\gamma - \alpha) < 0$$

Άσκηση 10.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, με $x_1 < x_2 < x_3$, καθώς και οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, επίσης διαδοχικοί όροι μιας άλλης αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Λύση

Λόγω των υποθέσεων, ισχύει για την f το θεώρημα της μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (2)$$

Όμως, επειδή οι x_1, x_2, x_3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ και, επειδή οι $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, ισχύει επίσης $f(x_2) - f(x_1) = f(x_3) - f(x_2)$.

Επομένως τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (3)

Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$. Επειδή επιπλέον ισχύει η (3), συμπεραίνουμε ότι για τη συνάρτηση f' ισχύουν στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Άσκηση 11.

Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) . Υποθέτουμε επίσης ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f και σε ένα τρίτο σημείο έστω $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Λύση

Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB .

- Για τη συνάρτηση f , ισχύουν στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Επομένως υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

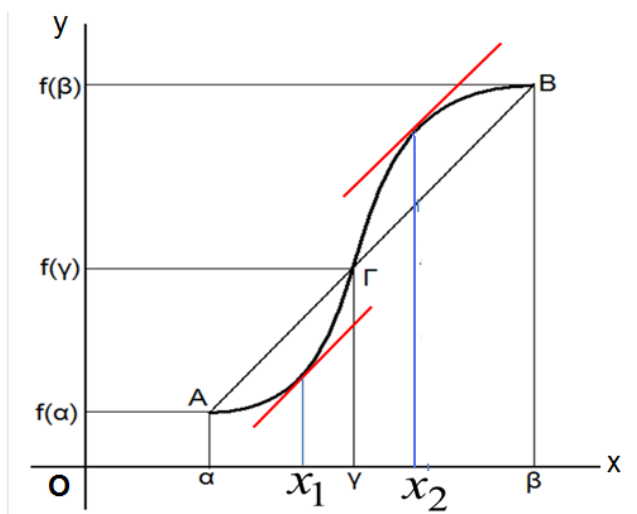
$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}. \text{ Όμως ο λόγος } \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \text{ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της}$$

ευθείας AB . Επομένως $f'(x_1) = \lambda$.

- Ομοίως υπάρχει $x_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(x_2) = \lambda$. Επομένως υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, \beta)$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = \lambda$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Επιπλέον, λόγω του προηγούμενου συμπεράσματος, ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι για την f' ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Ακολουθεί μια γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω προβλήματος:



Παρατηρήσεις:

1. Οι υποθέσεις οδηγούν στην ύπαρξη δύο παράλληλων ευθειών προς την ευθεία AB, όπως φαίνεται και στο σχήμα.
2. Το $\xi \in (x_1, x_2)$ είναι όπως θα δούμε παρακάτω ένα πιθανό σημείο καμπής της C_f .

Άσκηση 12.

Μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία της γραφικής παράστασης της f που να είναι συνευθειακά.

Λύση

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της γραφικής παράστασης της f , τα $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$.

Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$. Επομένως
$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

Από το θεώρημα όμως της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχουν σημεία $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Επομένως $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Επειδή όμως η f' είναι παραγωγίσιμη, αυτό σημαίνει ότι για την f' ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, άτοπο, αφού από την υπόθεση έχουμε $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 13.

Για μια συνάρτηση f υποθέτουμε ότι:

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[2, +\infty)$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, +\infty)$.
- $f(2) = 0$.
- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$, να δείξετε ότι $g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Λύση

Προφανώς η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, +\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{f(x)}{x-2} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (x-2) - f(x) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)f'(x) - f(x)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{x-2} \left(\frac{(x-2)f'(x) - f(x)}{x-2} \right) = \frac{1}{x-2} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x-2} \right) \end{aligned}$$

Όμως, από την υπόθεση ότι $f(2) = 0$ και από το γεγονός ότι για την f ισχύει σε κάθε διάστημα $[2, x]$ το θεώρημα της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(\xi), \text{ για κάποιο } \xi \in (2, x).$$



Επομένως $g'(x) = \frac{1}{x-2} \left(f'(x) - \frac{f(x)}{x-2} \right) = \frac{1}{x-2} (f'(x) - f'(\xi))$. Επειδή όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ και $2 < \xi < x$, έχουμε $f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$. Άρα

$$g'(x) = \frac{1}{x-2} (f'(x) - f'(\xi)) > 0.$$

Παρατήρηση: Το συμπέρασμα μας λέει με άλλα λόγια ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$, όπως θα δούμε στην ενότητα 8.

Άσκηση 14.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι $2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2 - x - 1} = f(x+2) - f(x+1) \quad (2)$$

Επειδή όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$, έχουμε $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, οπότε:

$$f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1) \Rightarrow$$

$$2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$$

Άσκηση 15.

Να αποδείξετε ότι $1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, για κάθε $x > 0$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t+1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$. Επομένως ισχύει για την f το θεώρημα της μέσης τιμής σε κάθε

διάστημα της μορφής $[0, x]$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$ (1).

Επειδή $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$, από την (1) έχουμε $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}$ (2)

Όμως

$$0 < \xi < x \Rightarrow$$

$$1 < 1 + \xi < 1 + x \Rightarrow$$

$$1 < \sqrt{1+\xi} < \sqrt{1+x} \Rightarrow$$

$$2 < 2\sqrt{1+\xi} < 2\sqrt{1+x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{1}{2}$$

Επομένως από την τελευταία και τη (2) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

Άσκηση 16.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι για δυο

οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha}$.

Λύση

Έστω δυο πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Η συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Επομένως στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Αυτό σημαίνει

ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$.

Επειδή $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, έχουμε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 3\alpha \xi^2 + 2\beta \xi + \gamma$, $\xi \in (x_1, x_2)$.

Η παράσταση $g(\xi) = 3\alpha \xi^2 + 2\beta \xi + \gamma$ είναι τριώνυμο με συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου το $3\alpha > 0$. Επομένως έχει ελάχιστο ίσο με

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-2\beta}{6\alpha}\right) &= g\left(\frac{-\beta}{3\alpha}\right) = 3\alpha \frac{\beta^2}{9\alpha^2} - 2\beta \frac{\beta}{3\alpha} + \gamma = \frac{\beta^2}{3\alpha} - \frac{2\beta^2}{3\alpha} + \gamma \\ &= \gamma - \frac{\beta^2}{3\alpha} = \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 3\alpha \xi^2 + 2\beta \xi + \gamma \geq \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha}.$$

Άσκηση 17.

Να αποδείξετε ότι $x+1 > e^{\frac{x}{x+1}}$, για $x > 0$.

Λύση

Επειδή και τα δυο μέλη της ανισότητας για $x > 0$ είναι θετικά και η συνάρτηση $\ln$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, έχουμε:

$$x+1 > e^{\frac{x}{x+1}} \Leftrightarrow \ln(x+1) > \ln\left(e^{\frac{x}{x+1}}\right) \Leftrightarrow \ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$$

Η συνάρτηση $f(t) = \ln(t+1)$ είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[0, x]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(0, x)$. Επομένως υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{\ln(x+1) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

$$\text{Όμως } f'(t) = \frac{1}{t+1}, \text{ οπότε } f'(\xi) = \frac{1}{\xi+1}, \text{ και επομένως } \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{\xi+1} \quad (1).$$

$$\text{Εξάλλου } 0 < \xi < x \Rightarrow 1 < \xi+1 < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi+1} < 1, \text{ οπότε}$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) \Rightarrow e^{\frac{x}{x+1}} < e^{\ln(x+1)}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{x+1}} < x+1 \Rightarrow x+1 > e^{\frac{x}{x+1}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ αποδείξτε ότι για κάθε $\beta > 0$ υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta}$.

B. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sin \xi = \frac{1 - \eta \mu \xi}{\xi}$.

Λύση

A. Μετασχηματίζουμε τη ζητούμενη: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = f(\beta)$ (1)

Αν $g(x) = xf(x)$ με $x \in [0, \beta]$ έχουμε:

- g συνεχής στο $[0, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο $(0, \beta)$ με $g'(x) = xf'(x) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, \beta)$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta - 0} \Leftrightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = \frac{\beta \cdot f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow \boxed{\xi f'(\xi) + f(\xi) = f(\beta)}$$

B. Η ζητούμενη σχέση γίνεται: $\sin \xi = \frac{1 - \eta \mu \xi}{\xi} \Leftrightarrow \xi \sin \xi = 1 - \eta \mu \xi \Leftrightarrow \xi \sin \xi + \eta \mu \xi = 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \eta \mu x$, με $x \in [0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = \sin x$ και εφαρμόζοντας το ερώτημα (A) για $\beta = \frac{\pi}{2}$ υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sin \xi = \frac{\eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu \xi}{\xi} \Leftrightarrow \sin \xi = \frac{1 - \eta \mu \xi}{\xi}$.

Άσκηση 2.

A. Θεωρούμε συναρτήσεις f, g με την f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και πραγματικούς αριθμούς α, β τέτοιους ώστε $f(g(\alpha)) = f(g(\beta))$, $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Αν το $g(\gamma)$ είναι εσωτερικό του διαστήματος με άκρα $g(\alpha), g(\beta)$ και για κάποιο $\gamma \in \mathbb{R}$ και ισχύει $g(\gamma) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\gamma)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

B. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln \alpha) = f(\ln \beta)$ όπου $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
(Υπόδειξη: Θεωρώ $\gamma^2 = \alpha\beta$)

Γ. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right)$ όπου $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
(Υπόδειξη: Θεωρώ $\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$)

Λύση

A. Ας υποθέσουμε ότι $g(\alpha) < g(\beta)$ (η άσκηση αντιμετωπίζεται όμοια και αν $g(\alpha) > g(\beta)$). Τότε $g(\alpha) < g(\gamma) < g(\beta)$ και εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[g(\alpha), g(\gamma)]$, $[g(\gamma), g(\beta)]$ αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα $(g(\alpha), g(\gamma)) \subseteq \mathbb{R}$, $(g(\gamma), g(\beta)) \subseteq \mathbb{R}$.

Επομένως θα υπάρχουν $\xi_1 \in (g(\alpha), g(\gamma))$ και $\xi_2 \in (g(\gamma), g(\beta))$ τέτοια ώστε:

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (g(\alpha), g(\gamma))$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(g(\gamma)) - f(g(\alpha))}{g(\gamma) - g(\alpha)}$ (1)

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (g(\gamma), g(\beta))$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(g(\beta)) - f(g(\gamma))}{g(\beta) - g(\gamma)}$ (2)

Με πρόσθεση των (1), (2) και επειδή $g(\gamma) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\gamma)$ και $f(g(\beta)) = f(g(\alpha))$ θα είναι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

B. Είναι εφαρμογή του (A) για $g(x) = \ln x$ με $x > 0$. Αρκεί να προσδιορίσουμε ένα $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\gamma) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\gamma) \Leftrightarrow \ln \gamma - \ln \alpha = \ln \beta - \ln \gamma \Leftrightarrow 2 \ln \gamma = \ln \beta + \ln \alpha \Leftrightarrow \ln \gamma^2 = \ln(\beta\alpha) \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\alpha\beta}$.

Πράγματι για το $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ (γεωμετρικός μέσος των α, β) είναι

$1 < \alpha < \gamma < \beta \Leftrightarrow 0 < \ln \alpha < \ln \gamma < \ln \beta$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\ln \alpha, \ln \gamma]$, $[\ln \gamma, \ln \beta]$ και εργαζόμενοι όπως στο (Α), θα έχουμε ότι:

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\ln \alpha, \ln \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\ln \gamma) - f(\ln \alpha)}{\ln \gamma - \ln \alpha}$ (3)

- υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\ln \gamma, \ln \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\ln \beta) - f(\ln \gamma)}{\ln \beta - \ln \gamma}$ (4)

Με πρόσθεση των (3), (4) και επειδή $\ln \gamma - \ln \alpha = \ln \beta - \ln \gamma$, $f(\ln \alpha) = f(\ln \beta)$ θα είναι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

Γ. Εφαρμογή του (Α) για $g(x) = \frac{1}{x}$. Αρκεί να προσδιορίσουμε ένα $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(\gamma) - g(\alpha) = g(\beta) - g(\gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha - \gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\gamma - \beta}{\gamma\beta} \Leftrightarrow \alpha\beta - \gamma\beta = \alpha\gamma - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta = (\alpha + \beta)\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Πράγματι για το $\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ (αρμονικός μέσος των α, β) είναι $1 < \alpha < \gamma < \beta \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{\alpha}$.

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στα $\left[\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right]$, $\left[\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}\right]$ και εργαζόμενοι όπως στο (Α), θα έχουμε ότι:

- υπάρχει $\xi_1 \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{\gamma}\right) - f\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}}$ (5)

- υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - f\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}}$ (6)

Με πρόσθεση των (5), (6) και επειδή $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}$, $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = f\left(\frac{1}{\beta}\right)$ θα είναι

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0.$$

Άσκηση 3.

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) - 2f'(\xi_3) = 0$.

Λύση

Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Επομένως θα υπάρχουν:

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1) \text{ και}$$

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

Επίσης εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον

$$\text{ένα } \xi_3 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_3) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \boxed{-2f'(\xi_3) = -\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}} \quad (3).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) προκύπτει η ζητούμενη $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) - 2f'(\xi_3) = 0$.

Άσκηση 4.

Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \leq \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha}$, $0 < \alpha \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

Λύση

Η ζητούμενη ισχύει ως ισότητα αν $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha < \beta$ η ζητούμενη ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \beta} \leq \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta \leq \frac{\alpha - \beta}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\alpha - \beta < 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \beta} \geq \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{\alpha - \beta} \geq \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \leq \frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} \leq \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

Θα αποδείξουμε γνήσια ανισότητα αν $\alpha < \beta$ δηλαδή θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \epsilon\phi t$ με $t \in [\alpha, \beta]$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(t) = (\epsilon\phi t)' = \frac{1}{\sin^2 t}$ (1). Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

Όμως $0 < \alpha < \xi < \beta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha > \sin \xi > \sin \beta$ (αφού η $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha > \sin^2 \xi > \sin^2 \beta \text{ (διότι } \sin x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 \beta} \text{ (διότι } \sin^2 x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right))$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

Άσκηση 5.

A. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ (1).

B. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Λύση

A. Για $x = 1$ η (1) ισχύει ως ισότητα. Θα αποδείξουμε την (1) με γνήσια ανισότητα για $x \neq 1$.

- Αν $0 < x < 1$: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$ με $t \in [x, 1]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1}$ (2).

$$\text{Όμως } 0 < x < \xi < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$$

- Αν $x > 1$: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \ln t$ με $t \in [1, x]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1}$ (3).

$$\text{Όμως } 1 < \xi < x \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 > \frac{\ln x}{x - 1} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x} < \ln x < x - 1$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$.

B. Από το ερώτημα (A) έχουμε:

- Αν $0 < x < 1$ είναι $\frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x - 1} > 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

- Αν $x > 1$ είναι $1 > \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Άσκηση 6.

A. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ να αποδείξετε ότι $x < \eta\mu x < x\sigma\upsilon\nu x$ ενώ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι $x\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x < x$.

B. Χρησιμοποιώντας το (A) ερώτημα επιβεβαιώστε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Λύση

A. Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = \eta\mu t$ με $t \in [x, 0]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$ με $f'(t) = \sigma\upsilon\nu t$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \frac{\eta\mu 0 - \eta\mu x}{0 - x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \frac{\eta\mu x}{x}$ (1).

$$\text{Όμως } -\frac{\pi}{2} < x < \xi < 0 \quad \overset{\text{συν} x \text{ γν. αυξ. στο } (-\frac{\pi}{2}, 0)}{\Leftrightarrow} \quad \sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu \xi < \sigma\upsilon\nu 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x < \eta\mu x < x\sigma\upsilon\nu x.$$

Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = \eta\mu t$ με $t \in [0, x]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f'(t) = \sigma\upsilon\nu t$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x - 0} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \xi = \frac{\eta\mu x}{x}$ (2).

$$\text{Όμως } 0 < \xi < x < \frac{\pi}{2} \quad \overset{\text{συν} x \text{ γν. φθιν. στο } (0, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \quad \sigma\upsilon\nu 0 > \sigma\upsilon\nu \xi > \sigma\upsilon\nu x \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x < x.$$

B. Από το ερώτημα (A) έχουμε $\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x \neq 0$.

Επιπλέον είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

Άσκηση 7.

A. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι $1 - x\eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

B. Χρησιμοποιώντας το (A) ερώτημα επιβεβαιώστε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

Λύση

A. Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = \sigma\upsilon\nu t$ με $t \in [x, 0]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$ με $f'(t) = -\eta\mu t$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \Leftrightarrow$

$$-\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu 0 - \sigma\upsilon\nu x}{0 - x} \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \quad (1).$$

$$\text{Όμως } -\frac{\pi}{2} < x < \xi < 0 \quad \overset{\eta\mu x \text{ γν. αυξ. στο } (-\frac{\pi}{2}, 0)}{\Leftrightarrow} \quad \eta\mu x < \eta\mu\xi < \eta\mu 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > -\eta\mu\xi > -\eta\mu 0 \quad (1)$$

$$-\eta\mu x > \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} > 0 \quad \overset{x < 0}{\Leftrightarrow} \quad -x\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - x\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x < 1$$

Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \sigma\upsilon\nu t$ με $t \in [0, x]$ η οποία είναι συνεχής σ' αυτό και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ με $f'(t) = -\eta\mu t$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$

$$-\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 0}{x - 0} \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \quad (2).$$

$$\text{Όμως } 0 < \xi < x < \frac{\pi}{2} \quad \overset{\eta\mu x \text{ γν. αυξ. στο } (0, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} \quad \eta\mu 0 < \eta\mu\xi < \eta\mu x \Leftrightarrow 0 > -\eta\mu\xi > -\eta\mu x \quad (2)$$

$$0 > \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} > -\eta\mu x \quad \overset{x > 0}{\Leftrightarrow} \quad 0 > \sigma\upsilon\nu x - 1 > -x\eta\mu x \Leftrightarrow 1 - x\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x < 1.$$

Αν $x = 0$ η ζητούμενη ισχύει ως ισότητα. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $1 - x\eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

Β. Υπολογίζουμε το όριο με τη χρήση του κριτηρίου της παρεμβολής. Από το ερώτημα (Α) έχουμε:

- $0 < \frac{\sin x - 1}{x} < -\eta \mu x$ για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\eta \mu x) = 0$ θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

- $-\eta \mu x < \frac{\sin x - 1}{x} < 0$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\eta \mu x) = 0$ θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$

Άσκηση 8.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και με $f(\beta) - f(\alpha) = 2(\beta - \alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί x_1, x_2 και x_3 στο διάστημα (α, β) , τέτοιοι ώστε:

$$\frac{5}{f'(x_1)} + \frac{6}{f'(x_2)} + \frac{9}{f'(x_3)} = 10$$

Λύση

Με τα σημεία y_1, y_2 χωρίζουμε το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$ σε τρία υποδιαστήματα με μήκη

$$(y_1 - f(\alpha)) = \frac{5}{20} \cdot (f(\beta) - f(\alpha)), (y_2 - y_1) = \frac{6}{20} \cdot (f(\beta) - f(\alpha)) \text{ και } (f(\beta) - y_2) = \frac{9}{20} \cdot (f(\beta) - f(\alpha))$$

Έστω κ_1 ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς του διαστήματος (α, β) για τον οποίο ισχύει $f(\kappa_1) = y_1$ και κ_2 αριθμός του διαστήματος (κ_1, β) για τον οποίο ισχύει $f(\kappa_2) = y_2$. Την ύπαρξη των αριθμών αυτών την εξασφαλίζει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών των συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα και φανερά: $\alpha < \kappa_1 < \kappa_2 < \beta$.

Για τη συνάρτηση f ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \kappa_1]$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ και $[\kappa_2, \beta]$ το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Επομένως υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \kappa_1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\kappa_1) - f(\alpha)}{\kappa_1 - \alpha} = \frac{y_1 - f(\alpha)}{\kappa_1 - \alpha} = \frac{\frac{5}{20}(f(\beta) - f(\alpha))}{\kappa_1 - \alpha} = \frac{5(f(\beta) - f(\alpha))}{20(\kappa_1 - \alpha)}$$

οπότε

$$\frac{5}{f'(x_1)} = \frac{20(\kappa_1 - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (1)$$

Ομοίως υπάρχουν $x_2 \in (\kappa_1, \kappa_2)$ και $x_3 \in (\kappa_2, \beta)$, τέτοια ώστε

$$\frac{6}{f'(x_2)} = \frac{20(\kappa_2 - \kappa_1)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{9}{f'(x_3)} = \frac{20(\beta - \kappa_2)}{f(\beta) - f(\alpha)} \quad (3)$$

$$\text{Άρα } \frac{5}{f'(x_1)} + \frac{6}{f'(x_2)} + \frac{9}{f'(x_3)} = \frac{20(\kappa_1 - \alpha + \kappa_2 - \kappa_1 + \beta - \kappa_2)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{20(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{20(\beta - \alpha)}{2(\beta - \alpha)} = 10.$$

Άσκηση 9.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση C_f τέμνει τη διχοτόμο (δ) του πρώτου τεταρτημορίου σε τρία διαφορετικά σημεία. Να δείξετε ότι:

- i. Υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην (δ) .
- ii. Υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων.

Λύση

i. Υποθέτουμε ότι η C_f τέμνει τη (δ) στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$, με $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Επειδή η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $y = x$, έχουμε $x_1 = f(x_1)$, $x_2 = f(x_2)$ και $x_3 = f(x_3)$. Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$. Επομένως στα διαστήματα αυτά ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_2} = 1$$

Αυτό όμως δηλώνει ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $\Delta(\xi_1, f(\xi_1))$ και $E(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι παράλληλες προς τη διχοτόμο (δ) της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 1, αφού η εξίσωση της είναι $y = x$.

ii. Η εφαπτομένη ε της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0)$$

Επομένως υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων, όταν η εξίσωση $f(x) = x \cdot f'(x)$ έχει δυο λύσεις στο $(0, +\infty)$.

Η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x)x - f(x)(x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)x - f(x)(x)'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0$ έχει δυο λύσεις στο $(0, +\infty)$.

Πράγματι ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής

και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και με $g(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} = 1$ και $g(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2} = 1$,

δηλαδή $g(x_1) = g(x_2)$. Επομένως ισχύει για την g στο διάστημα $[x_1, x_2]$ το θεώρημα του Rolle. Άρα υπάρχει $\kappa \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $g'(\kappa) = 0$.

Με ανάλογους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και σημείο $\Lambda(\lambda, f(\lambda))$ της C_f , με $\lambda \in (x_2, x_3)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Επομένως υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων.

Άσκηση 10.

i. Δυο συναρτήσεις f και g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι:

- Συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.
- Παραγωγίσιμες στο (α, β) .
- $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ii. Αν $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\phi\theta.$$

Λύση

i. Προφανώς είναι $g(\beta) \neq g(\alpha)$, διότι, αν ήταν $g(\beta) = g(\alpha)$, τότε η g θα ικανοποιούσε όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και επομένως θα υπήρχε $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $g'(\gamma) = 0$, που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη συνάρτηση:

$h(x) = (g(\beta) - g(\alpha))f(x) - (f(\beta) - f(\alpha))g(x) - f(\alpha)g(\beta) + f(\beta)g(\alpha)$ που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $h(\alpha) = h(\beta)$. Επομένως, από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

Όμως $h'(x) = (g(\beta) - g(\alpha))f'(x) - (f(\beta) - f(\alpha))g'(x)$, οπότε
 $(g(\beta) - g(\alpha))f'(\xi) - (f(\beta) - f(\alpha))g'(\xi) = 0$.

$$\text{Άρα } \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

ii. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) , όπου $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Επιπλέον $g'(x) = -\eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα, υπάρχει

$$\theta \in (\alpha, \beta), \text{ τέτοιο ώστε } \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{-\eta\mu\theta}.$$

$$\text{Άρα } \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\phi\theta.$$

Άσκηση 11.

Να λύσετε την εξίσωση $(\alpha+1)^x + (\alpha+3)^x = (\alpha+4)^x + \alpha^x$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι όροι της εξίσωσης είναι οι τιμές της συνάρτησης $f(t) = t^x$, $t > 0$ με $x \in \mathbb{R}$, για $t = \alpha+1$, $t = \alpha+3$, $t = \alpha+4$ και $t = \alpha$ αντιστοίχως.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(\alpha+1)^x - \alpha^x = (\alpha+4)^x - (\alpha+3)^x$.

Για τη συνάρτηση $f(t) = t^x$ ισχύει το θεώρημα της μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \alpha+1]$ και $[\alpha+3, \alpha+4]$.

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \alpha+1)$ και $\xi_2 \in (\alpha+3, \alpha+4)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha+1) - f(\alpha)}{(\alpha+1) - \alpha} = f(\alpha+1) - f(\alpha) = (\alpha+1)^x - \alpha^x \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha+4) - f(\alpha+3)}{(\alpha+4) - (\alpha+3)} = f(\alpha+4) - f(\alpha+3) = (\alpha+4)^x - (\alpha+3)^x \quad (2)$$

Όμως $f'(t) = (t^x)' = x \cdot t^{x-1}$. Επομένως $f'(\xi_1) = x \cdot \xi_1^{x-1}$ και $f'(\xi_2) = x \cdot \xi_2^{x-1}$.

Έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$x \cdot \xi_1^{x-1} = x \cdot \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x \cdot (\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1} = 0.$$

Έχουμε:

$$\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow \xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = 0$ και $x = 1$.

Άσκηση 12.

Αν $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$, για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση

Για $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \quad (1)$$

Όμως για τη συνάρτηση $g(t) = \eta\mu t$, ισχύει στο διάστημα $[0, x]$, με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, το θεώρημα

της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Επομένως υπάρχει ξ με $0 < \xi < x < \frac{\pi}{2}$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(\xi)$$

$$\frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x - 0} = \sigma\upsilon\nu \xi$$

$$\frac{\eta\mu x}{x} = \sigma\upsilon\nu \xi$$

Οπότε η (1) γίνεται $f'(x) = \frac{1}{x} (\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu \xi)$.

Επειδή $0 < \xi < x < \frac{\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu \xi > \sigma\upsilon\nu x$, και επομένως $f'(x) = \frac{1}{x} (\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu \xi) < 0$.

Άσκηση 13.

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$ και τέτοια ώστε $f(1) = f(2) = 0$. Αν υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) > 0$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

ii. Υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) < 0$.

Λύση

i. Για τη συνάρτηση f ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Επομένως υπάρχουν $x_1 \in (1, \xi)$ και $x_2 \in (\xi, 2)$ τέτοια

$$\text{ώστε } f'(x_1) = \frac{f(\xi) - f(1)}{\xi - 1} = \frac{f(\xi)}{\xi - 1} > 0 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(\xi)}{2 - \xi} = \frac{-f(\xi)}{2 - \xi} < 0 \quad (2)$$

Άρα $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

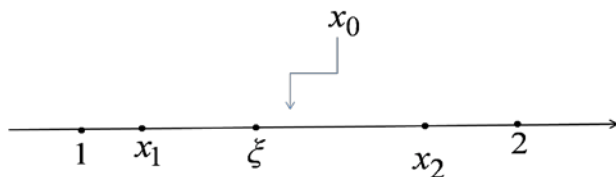
ii. Λόγω των υποθέσεων, ισχύει για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού.

Επομένως υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, που σημαίνει $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f''(x_0) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot [f'(x_2) - f'(x_1)].$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) έχουμε

$$f''(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \left[\frac{-f(\xi)}{2 - \xi} - \frac{f(\xi)}{\xi - 1} \right] = \frac{-f(\xi)}{x_2 - x_1} \cdot \left(\frac{1}{2 - \xi} + \frac{1}{\xi - 1} \right)$$



Όμως, $1 < x_1 < \xi < x_2 < 2$ και $f(\xi) > 0$. Επομένως $f''(x_0) < 0$.

Άσκηση 14.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

i. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha \neq \beta$, ισχύει

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

ii. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha \neq \beta$, ισχύει

$$\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Λύση

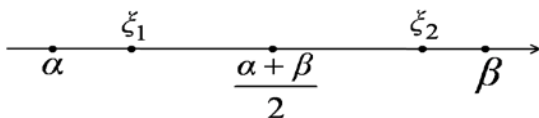
i. Έστω $\alpha < \beta$. Τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ και η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} &\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως, επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει για την f το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$. Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η ανισότητα (1) είναι ισοδύναμη με την $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ που ισχύει, αφού $\xi_1 < \xi_2$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα.



ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, είναι $f'(x) = e^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη ανισότητα ισχύει

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} > f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \text{ οπότε } \frac{e^\alpha + e^\beta}{2} > e^{\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Άσκηση 15.

Μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και τέτοια ώστε $f(\alpha) = 3\beta$ και $f(\beta) = 3\alpha$.

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1 και ξ_2 του διαστήματος (α, β) , τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 9$.

Λύση

i. Αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - 3x = 0$, έχει ρίζα στο διάστημα (α, β) .

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned} g(\alpha) \cdot g(\beta) &= (f(\alpha) - 3\alpha)(f(\beta) - 3\beta) = (3\beta - 3\alpha) \cdot (3\alpha - 3\beta) \\ &= 9(\beta - \alpha) \cdot (\alpha - \beta) = -9(\beta - \alpha)^2 < 0 \end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0.$$

ii. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , θα είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$, $[x_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α, x_0) , (x_0, β) . Επομένως ισχύει σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$ το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{3x_0 - 3\beta}{x_0 - \alpha} = 3 \frac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha} \quad (1)$$

$$\text{και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{3\alpha - 3x_0}{\beta - x_0} = 3 \frac{\alpha - x_0}{\beta - x_0} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 3 \frac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha} \cdot 3 \frac{\alpha - x_0}{\beta - x_0} = 9$$