ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

# ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

**1.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + 2x^2 - 3x - 1$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(-2, 1)$.

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $5x^4 + 4x - 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 1)$.

**2.** Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} < \varepsilon\varphi\,\beta - \varepsilon\varphi\,\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 \beta} \quad , \text{για κάθε α, β με } 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

**3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x\, ln\, x = 2 - x$$

**α)** έχει **το πολύ μία** ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, e\right)$.

**β)** έχει **ακριβώς μία** ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, e\right)$.

**4.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2} ln\left(x^2 + 9\right)$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\left| g(\beta) - g(\alpha) \right| \le \frac{|\beta - \alpha|}{6}.$$

**5.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu\, x \cdot \sigma\upsilon\nu\, x + x \quad , \ x \in \mathbb{R}.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $0 \le f'(x) \le 2$.

**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > \frac{\pi}{4}$ ισχύει ότι

$$\frac{2 + \pi}{4} \le f(x) \le \frac{8x + 2 - \pi}{4}.$$

**6.** Δίνεται συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ συνάρτηση $f$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον, ισχύουν ότι

$$f'(x) \le 1 \ \text{ για κάθε } \ x \in (0, 4) \ \text{ και } \ f(4) = 4.$$

Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

**7.** Δίνεται άρτια συνάρτηση $g$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[-5, 0]$ και $[0, 5]$ να αποδείξετε ότι $g(0) > g(5)$.

**8.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f(2) = f(1) + 9 \ \text{ και } \ f''(x) > 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει **μοναδικό** $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 5.$$

**9.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$2f(x) = f(x-1) + f(x+1) \quad , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της $C_f$, στα οποία οι εφαπτομένες της να είναι **παράλληλες** μεταξύ τους.

**β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f''$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**10.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x \quad , \ x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = f\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right).$$

**11.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$\frac{\alpha^2}{f(\beta)} + \frac{\beta^2}{f(\alpha)} = 2\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad f'(x) + \frac{x}{2} f''(x) \neq 0 \ , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) + x f'(x) = 0$$

έχει **μοναδική** ρίζα.

**12.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με

$$\frac{1}{e} + g(1) = g(e).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $k > 0$ τέτοιο, ώστε

$$1 - \ln k - k^2 g'(k) = 0.$$

**13.** Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και άρτια.

**α)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 \neq x_2$, στα οποία οι συντελεστές διεύθυνσης των αντίστοιχων εφαπτομένων της $C_f$ είναι αντίθετοι μεταξύ τους.

**β)** Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

**γ)** Αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι

$$f(x) = x^2 + \sigma\upsilon\nu\, x \ , \ x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f'$.

**14.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, με $\alpha < 0 < \beta$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον, η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα. Να δείξετε ότι

$$\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) > 0.$$

**15.** Δίνονται παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με

$$g(x) = ln\, f(x)\ , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Αν η $f$ είναι γνησίως αύξουσα, η $f\,'$ γνησίως φθίνουσα και $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(x) \cdot f\,'(x+1) < ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^{f(x)\cdot f(x+1)} < f(x+1) \cdot f\,'(x)\ , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

**16.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(1) = e\, f(0)\,.$$

Να αποδείξετε ότι:

**α)** υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$f\,'(\xi) = f(\xi)\,.$$

**β)** υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$e^k(k-1)f(k) + \left(e^k - 1\right)(k-1)f\,'(k) + \left(e^k - 1\right)f(k) = 0\,.$$