

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x+1)$, $g(x)=x$ και $\varphi(x)=\frac{\ln(x+1)^2}{2}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $h = \frac{f}{g}$, $s = \frac{\varphi}{g}$.

γ₁) Να εξετάσετε αν ισχύει $h=s$.

γ₂) Αν $h \neq s$, να βρείτε, αν υπάρχει, το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο ώστε $h=s$.

δ) Έστω η συνάρτηση $K(x) = \begin{cases} h(x) & x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση K να είναι συνεχής.

ε) Αν $\alpha=1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση K είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.