

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση να είναι κοίλη στο $(0, \xi)$ και κυρτή στο $(\xi, +\infty)$.

γ. Αν $E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$, να αποδείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 1} E(\lambda) = 0$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + \eta \mu x}{e^x}$.