

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} xe^{-x+1} + \alpha x + \beta & , x < 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

Δ. Έστω F μια αρχική της f με $F(0) = 0$.

Ισχύει $\int_0^1 e^x F(x) dx = e^2 - \frac{5e}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $F(1) = e - 2$.

Δ2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $F(\xi) = \frac{1}{2}$.

Δ3. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{2f(x_1)} + \frac{2e-5}{2f(x_2)} = 1$.

E. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_0^2 f(x) dx + 1}{-e^x + 1} + \frac{-\int_0^2 f(x) dx + 2}{e^{-x+2} - 1} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, 2)$.