

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής

Γ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^x f(x) dx < 1$.

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x) dx$.

E₁. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(1, f(1))$.

E₂. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(1)x \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

E₃. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(1) < \int_0^1 e^x f(x) dx < 1$.

ΣΤ. Να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln(1+\sqrt{2}) \leq f(x) \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \ln(1+\sqrt{2}) \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty).$$