

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 5f(x) + x = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρεθεί το πρόσημό της.

B. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

Γ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(6, f(6))$.

Δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x - 19) = x + 1$.

E. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{f^2(x) - f(x)} - f(x) \right)$.