

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + \alpha & , x \in (-\infty, 0) \\ -x^3 + 3x^2 + \beta x + 1 & , x \in [0, +\infty) \end{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$

A. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να ορίζει κλίση στο $x_0=0$, η οποία και να βρεθεί.

B. Αν $\alpha=1$ και $\beta=0$,

B₁. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

B₂. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες $\psi=5$, $x=1$ και $x=3$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες, έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Δ. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x_2 - 3}{f(x) - 5}$.