

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + (1-e)x - 1 & , x \neq 1 \\ \int_0^1 (xe^x - 1)dx & , x = 1 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\int_0^1 (xe^x - 1)dx = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία της $O(0,0)$ και $A(1,0)$.