

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + e^x = 0$ έχει ακριβώς μια λύση για $x < 0$, που βρίσκεται στο $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf'(x) = xe^{-x} + 1$ για κάθε $x < 0$ και $f(-1) = -e$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = -e^{-x} + \ln(-x)$, $x < 0$.

B2. α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό μέγιστο σε σημείο $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

β. Ισχύει $f(x_0) < 0$.

B3. Να δείξετε ότι η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

B4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.