

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^x & , x \leq 1 \\ x^2 - x + \ln \alpha & , x > 1 \end{cases}, \alpha > 0$.

i) Να βρείτε το α αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Αν $\alpha=e$,

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$.

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ για κάθε $x > 1$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(e^x) - e^x)x^3 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}, \kappa > 0$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{x + 1} - \frac{f(1) - \eta\mu 1}{x - 1} = 2, \lambda < \mu \leq 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1, 1)$.