

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία με εξίσωση $\psi = x$ είναι εφαπτόμενη της C_f στην αρχή των αξόνων.

A. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τομών της.

Γ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του κ .

Δ. Σημείο $M(x, \psi)$ κινείται στη γραφική παράσταση της f . Να βρείτε τη θέση του σημείου M στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, αν ισχύει $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

E. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) \sin x \, dx = 0$.