

Άσκηση 18-4-2025

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = k \sin x - x$. Όπου $k > 1$ σταθερός πραγματικός αριθμός.

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $k > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

β) i) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1 και τοπικό μέγιστο στο x_2 .

ii) Να δείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Αν x_2 είναι ο αριθμός που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής της συνάρτησης

$g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ στο διάστημα $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

, να δείξετε ότι $x_2 = \frac{\pi}{3}$ και $k=2$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 1} dx < \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

Λέσχη Μαθηματικών Ν.Ορεστιάδος.

Δημήτρης Συντζούδης.